Άξονες περιστροφής στερεού

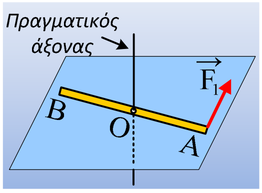
Πραγματικοί και νοητοί.

Μιλάμε συνεχώς για περιστροφή ενός στερεού γύρω από άξονα, αλλά συνήθως ξεχνάμε να πούμε αν αυτός ο άξονας είναι πραγματικός ή νοητός. Δεν είναι το ίδιο να περιστρέφω την πόρτα η οποία στηρίζεται στους μεντεσέδες και το ίδιο να περιστρέφω το στυλό που κρατάω στο χέρι μου. Και αυτό γιατί ο πραγματικός άξονας είναι εκεί για να επιβάλει συγκεκριμένο τρόπο περιστροφής, ενώ ο νοητός δεν υπάρχει και σε τελευταία ανάλυση είναι μια δική μου σκέψη που τον εντάσσει στο πρόβλημα.

Ας δούμε μερικά παραδείγματα για να ξεδιαλύνουμε την κατάσταση.

Παράδειγμα 1ο:

Πάνω σε μια παγωμένη λίμνη ηρεμεί μια ομογενής σανίδα μάζας M=6kg μήκους ℓ=2m, η οποία μπορεί να στρέφεται γύρω από (πραγματικό) κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον της Ο. Σε μια στιγμή t=0 δέχεται την επίδραση μιας οριζόντιας δύναμης σταθερού μέτρου F_1=4N, στο άκρο της Α, η οποία παραμένει κάθετη στη ράβδο, όπως στο σχήμα, μέχρι τη στιγμή t_1=5s, όπου η δύναμη καταργείται.



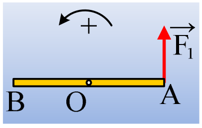
i) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της σανίδας τις χρονικές στιγμές t_1=5s και t_2=10s.

ii) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί ο άξονας στη σανίδα τις χρονικές στιγμές t_1=4s και t_2=10s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σανίδας ως προς τον άξονα $I_{cm} = \frac{1}{12}M\ell^2$.

Απάντηση:

Στο διπλανό σχήμα, έχουμε σχεδιάσει τη ράβδο και την ασκούμενη δύναμη (κάτοψη).

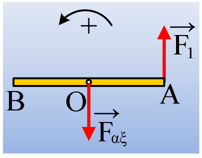


i) Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα για την στροφική κίνηση της σανίδας ως προς τον άξονα περιστροφής έχουμε:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F_1\cdot\frac{\ell}{2} = \frac{1}{12}M\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{6F_1}{M\ell} = \frac{6\cdot 4}{6\cdot 2}rad/s^2 = 2rad/s^2$$

Συνεπώς τη στιγμή t_1=5s, η σανίδα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t_1$=10rad/s. Αλλά από εκεί και πέρα δεν δέχεται ροπή, οπότε η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή, συνεπώς και ω_2=10rad/s.



ii) Για όσον χρόνο ασκείται η δύναμη F_1, ο άξονας ασκεί οριζόντια δύναμη στην σανίδα, αφού το κέντρο μάζας της παραμένει ακίνητο:

$$\Sigma F=0 \rightarrow F_1 - F_{\alpha\xi}=0 \rightarrow F_{\alpha\xi}=4N$$

με κατεύθυνση όπως στο σχήμα.

Όταν t>5s όπου δεν ασκείται πλέον η δύναμη F_1, μηδενίζεται και η δύναμη από τον άξονα, οπότε η σανίδα στρέφεται πλέον με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, χωρίς να δέχεται δύναμη από τον άξονα.

Σχόλιο 1^o:

Με βάση το παραπάνω σχήμα στη διάρκεια της γωνιακής επιτάχυνσης, στη σανίδα ασκείται ένα ζεύγος δυνάμεων F_1-$F_{εξ}$, το οποίο μπορεί να θεωρηθεί ότι προκαλεί την περιστροφή της σανίδας.

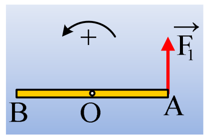
Παράδειγμα 2^o:

Ελευθερώνουμε τη σανίδα από τον άξονα και την αφήνουμε πάνω στην λίμνη. Σε μια στιγμή ασκούμε στο άκρο της την ίδια δύναμη F_1. Να βρεθεί η επιτάχυνση του άκρου Α, αμέσως μόλις ασκηθεί η δύναμη.

Απάντηση:

Η σανίδα θα εκτελέσει σύνθετη κίνηση η οποία θεωρούμε ότι αποτελείται από μια μεταφορική και μια στροφική, γύρω από νοητό κατακόρυφο άξονα που περνά από το μέσον της Ο.

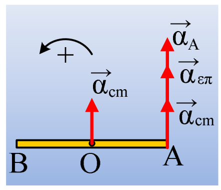
Με βάση τον ορισμό του κέντρου μάζας, το κέντρο Ο θα αποκτήσει επιτάχυνση, η οποία υπολογίζεται από το 2^o νόμο του Νεύτωνα:



$$ΣF=M·α_{cm} \rightarrow a_{cm}=\frac{F_1}{M}=\frac{4}{6}m/s^2=\frac{2}{3}m/s^2$$

Της ίδιας κατεύθυνσης με τη δύναμη.

Εξάλλου για την στροφική κίνηση:



$$Στ=I·α_{γων} \rightarrow a_{γων}=\frac{F_1\cdot\frac{\ell}{2}}{\frac{1}{12}M\ell^2}=\frac{6F_1}{M\ell}=\frac{6\cdot 4}{6\cdot 2}rad/s^2=2rad/s^2$$

οπότε το σημείο Α έχει επιτρόχια επιτάχυνση μέτρου $α_{επ}=α_{γων}\cdot R=2m/s^2$, όπως στο διπλανό σχήμα.

Έτσι η επιτάχυνση του άκρου Α είναι ίση με:

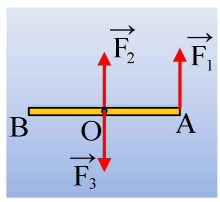
$$α_A=α_{cm}+α_{επ}=\frac{2}{3}m/s^2+2m/s^2=\frac{8}{3}m/s^2$$

Σχόλιο 2^o:

Με βάση την παραπάνω λύση, ο ρόλος της δύναμης είναι διπλός. Από την μια μεριά σαν δύναμη επιταχύνει μεταφορικά τη σανίδα στη διεύθυνσή της, ενώ από την άλλη, μέσω της ροπής της προκαλεί και την γωνιακή επιτάχυνση της σανίδας.

Θα μπορούσαμε όμως να κάνουμε την παρακάτω θεώρηση:

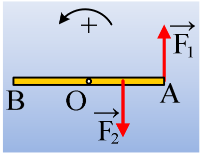
Έστω ότι στο μέσον Ο ασκούνται δύο υποθετικές δυνάμεις ίσου μέτρου 4N, με αντίθετη φορά, όπως στο διπλανό σχήμα. Τότε οι δυνάμεις F_1 και F_3 αποτελούν ένα ζεύγος το οποίο περιστρέφει τη σανίδα, ενώ η F_2 είναι αυτή που επιταχύνει μεταφορικά τη σανίδα.



Η αντιμετώπιση αυτή, μας διευκολύνει και κάνει πιο σαφή τον ρόλο μιας δύναμης που επιταχύνει (μεταφορικά) και μιας ροπής ζεύγους που επιταχύνει περιστροφικά τη σανίδα.

Η θεώρηση αυτή βέβαια, δεν πρέπει να μας κάνει να σκεφτόμαστε ότι οι δυνάμεις F_2 και F_3 είναι πραγματικές και ασκούνται από τον νοητό άξονα!!!

Παράδειγμα 3ο:



Επαναλαμβάνουμε το πείραμα (με τον άξονα στο μέσον Ο της σανίδας) αλλά τώρα εκτός από την παραπάνω δύναμη F_1 ασκούμε στη σανίδα και μια δεύτερη παράλληλη και ίσου μέτρου F_2, η οποία ασκείται στο μέσον Μ της ΟΑ, με αντίθετη φορά. Οι δυνάμεις ασκούνται μέχρι τη στιγμή t_1=5s, όπου και καταργούνται.

α) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της σανίδας τις χρονικές στιγμές t_1=5s και t_2=10s.

β) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί ο άξονας στη σανίδα τις χρονικές στιγμές t_1=4s και t_2=10s.

Απάντηση:

i) Με την ίδια όπως παραπάνω λογική παίρνουμε:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F_1\cdot\frac{\ell}{2} - F_2\cdot\frac{\ell}{4} = \frac{1}{12}M\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$F_1\cdot d = \frac{1}{12}M\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad (1)$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3F_1}{M\ell} = \frac{3\cdot 4}{6\cdot 2}rad/s^2 = 1rad/s^2$$

Συνεπώς τη στιγμή t_1=5s, η σανίδα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t_1$=5rad/s. Αλλά από εκεί και πέρα δεν δέχεται ροπή, οπότε η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή, συνεπώς και ω_2=5rad/s.

ii) Για όσον χρόνο ασκείται το ζεύγος των δύο δυνάμεων, έστω ότι ο άξονας ασκεί οριζόντια δύναμη στην σανίδα $F_{\alpha\xi}$. Αφού το κέντρο μάζας της παραμένει ακίνητο:

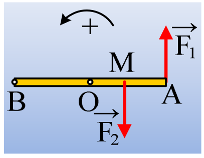
$$\Sigma F=0 \rightarrow F_1-F_2+F_{\alpha\xi}=0 \rightarrow F_{\alpha\xi}=0N$$

Όταν t>5s η σανίδα στρέφεται πλέον με σταθερή γωνιακή ταχύτητα, χωρίς να δέχεται δύναμη από τον άξονα.

Σχόλιο 3ο:

Με βάση τα παραπάνω στη σανίδα ασκείται ένα ζεύγος δυνάμεων η ροπή του οποίου επιταχύνει στροφικά τη σανίδα. Μόλις πάψει να ασκείται το ζεύγος των δυνάμεων, η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή. Αλλά είτε ασκείται το παραπάνω ζεύγος είτε όχι, ο άξονας δεν ασκεί καμιά δύναμη στη σανίδα. Συνεπώς αν την ελευθερώναμε από τον άξονα και της ασκούσαμε το ίδιο ζεύγος δυνάμεων, η κίνησή της θα ήταν ακριβώς η ίδια, όπως παραπάνω. Ο άξονας δεν παίζει κανένα ρόλο και η περιστροφή θα γινόταν γύρω από έναν νοητό κατακόρυφο άξονα.

Παράδειγμα 4ο:



Η παραπάνω σανίδα τώρα μπορεί να στρέφεται γύρω από σταθερό κατακόρυφα άξονα ο οποίος περνά από το άκρο της Β και κάποια στιγμή t=0, δέχεται την επίδραση του ζεύγους δυνάμεων όπως στο προηγούμενο παράδειγμα.

α) Να βρεθεί η γωνιακή ταχύτητα της σανίδας τις χρονικές στιγμές t_1=5s και t_2=10s.

β) Να υπολογιστεί η δύναμη που ασκεί ο άξονας στη σανίδα τις χρονικές στιγμές t_1=4s και t_2=10s.

Απάντηση:

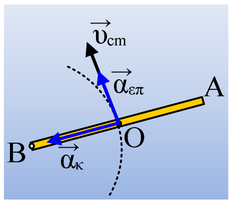
i) Με την ίδια όπως παραπάνω λογική παίρνουμε:

$$\Sigma\tau = I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu} \rightarrow F_1\cdot\ell - F_2\cdot\frac{3\ell}{4} = I_B\cdot a_{\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$F_1\cdot\frac{\ell}{4} = \frac{1}{3}M\ell^2\cdot a_{\gamma\omega\nu} \quad (2)$$

$$a_{\gamma\omega\nu} = \frac{3F_1}{4M\ell} = \frac{3\cdot 4}{4\cdot 6\cdot 2}rad/s^2 = 0{,}25rad/s^2$$

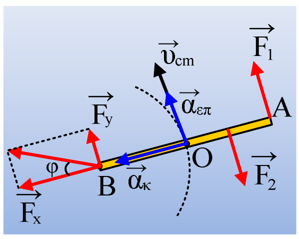
Συνεπώς τη στιγμή t_1=5s, η σανίδα στρέφεται με γωνιακή ταχύτητα $\omega_1=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t_1$=1,25rad/s. Αλλά από εκεί και πέρα δεν δέχεται ροπή, οπότε η γωνιακή ταχύτητα παραμένει σταθερή, συνεπώς και ω_2=1,25rad/s.



ii) Για όσον χρόνο ασκείται το ζεύγος των δύο δυνάμεων, έστω ότι ο άξονας ασκεί οριζόντια δύναμη στην σανίδα $F_{\alpha\xi}$. Αλλά το κέντρο μάζας της σανίδας, δεν παραμένει τώρα ακίνητο, αλλά επιταχύνεται. Έτσι τη στιγμή t_1=4s, όπου η γωνιακή ταχύτητα περιστροφής έχει μέτρο $\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t$=1rad/s, το κέντρο μάζας Ο, έχει μια επιτάχυνση, η οποία μπορεί να αναλυθεί σε δυο συνιστώσες, μια με φορά προς το κέντρο της κυκλικής τροχιάς που διαγράφει (σημείο Β), η γνωστή μας κεντρομόλος επιτάχυνση και μια στη διεύθυνση της ταχύτητας του Ο, επιτρόχια επιτάχυνση, υπεύθυνη για την μεταβολή του μέτρου της ταχύτητας του Ο, όπως στο σχήμα.

$$\text{Αλλά } \alpha_\kappa=\omega^2\cdot R=1^2\cdot 1m/s^2=1\ m/s^2$$

$$\text{Ενώ } a_{\varepsilon\pi} = \frac{d|\upsilon_{cm}|}{dt} = \frac{d(\omega R)}{dt} = a_{\gamma\omega\nu}\cdot\frac{\ell}{2} = 0{,}25\cdot 1\,m/s^2 = 0{,}25m/s^2$$



Εφαρμόζοντας τώρα το δεύτερο νόμο του Νεύτωνα για το κέντρο μάζας της σανίδας παίρνουμε (θεωρούμε άξονα x κατά μήκος της σανίδας και y την κάθετη διεύθυνση:

$$\Sigma F_x=M\alpha_x \rightarrow F_x=M\cdot\alpha_\kappa=6N$$

$$\text{Και } F_y+F_1-F_2=M\cdot\alpha_y \rightarrow$$

$$F_y=M\cdot\alpha_y=1{,}5N$$

Συνεπώς η δύναμη που ασκεί ο άξονας έχει μέτρο $F=\sqrt{F_x^2+F_y^2}\approx 6{,}2N$, ενώ σχηματίζει γωνία φ με τον άξονα της σανίδας, όπως στο σχήμα, όπου $\varepsilon\varphi\varphi=\frac{F_y}{F_x}=\frac{1}{4}$.

Ενώ για t>5s η δύναμη του άξονα είναι μόνο η συνιστώσα F_x= M·α_κ=M· ω^2·R→

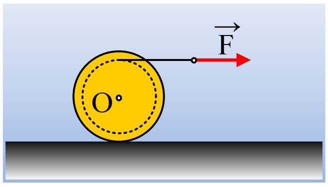
Όπου ω=$\alpha_{\gamma\omega\nu}$· t=0,25· 5rad/s=1,25 rad/s, οπότε:

F_x= M· ω^2· R=6· $1{,}25^2$· 1N=9,375N

Σχόλιο 4ο:

Προφανώς στην περίπτωση αυτή, **δεν θα μπορούσαμε** να αφαιρέσουμε τον άξονα και να πετύχουμε την ίδια κίνηση, περιστροφή γύρω από νοητό άξονα, που θα περνά από το άκρο της ράβδου.

Παράδειγμα 5ο:

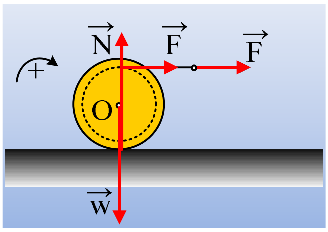


Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί ένας κύλινδρος μάζας 200kg και ακτίνας R=0,5m, στο μέσον του οποίου υπάρχει ένα αυλάκι βάθους 10cm. Στο αυλάκι αυτό τυλίγουμε ένα αβαρές νήμα και σε μια στιγμή t=0, τραβώντας το νήμα ασκούμε στον κύλινδρο οριζόντια δύναμη F=100N.

Να βρεθεί η ταχύτητα και η γωνιακή ταχύτητα του κυλίνδρου τη στιγμή t_1=10s.

Δίνεται η ροπή αδράνειας του κυλίνδρου I= ½ MR².

Απάντηση:



Στον κύλινδρο εκτός της οριζόντιας δύναμης F, η οποία ασκείται μέσω του νήματος, ασκούνται επίσης το βάρος και η κάθετη αντίδραση του επιπέδου, όπως στο σχήμα.

Εφαρμόζοντας το 2ο νόμο του Νεύτωνα έχουμε:

Για την μεταφορική κίνηση:

$$\Sigma F=M\cdot\alpha_{cm}\rightarrow F=M\cdot\alpha_{cm}\rightarrow a_{cm}=\frac{F}{M}=\frac{100}{200}m/s^2=0{,}5m/s^2$$

Για την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου γύρω από νοητό άξονα που περνά από το κέντρο O της βάσης του (στο σχήμα):

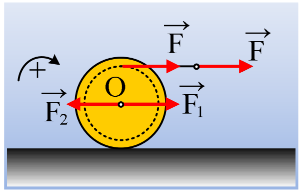
$$\Sigma\tau=I\cdot\alpha_{\gamma\omega\nu}\rightarrow a_{\gamma\omega\nu}=\frac{Fr}{I}=\frac{Fr}{\frac{1}{2}MR^2}=\frac{100\cdot 0{,}4}{\frac{1}{2}200\cdot 0{,}5^2}rad/s^2=1{,}6\,rad/s^2$$

Οπότε η ταχύτητα του άξονα του κυλίνδρου είναι ίση με:

$\upsilon_{cm}=\alpha_{cm}\cdot t$=5m/s και

$\omega=\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t$=16 rad/s.

Σχόλιο 5ο:



Προφανώς και εδώ θα μπορούσαμε να θεωρήσουμε ότι στο κέντρο μάζας ασκούνται δύο αντίθετες δυνάμεις μέτρου 100Ν, όπως στο σχήμα, οπότε θα είχαμε το σχήμα:

Η δύναμη F και η F_2 αποτελούν ένα ζεύγος που προκαλεί την περιστροφική κίνηση του κυλίνδρου (προκαλεί την γωνιακή επιτάχυνσή του), ενώ η δύναμη F_1 προκαλεί την μεταφορική επιτάχυνση του κυλίνδρου.

Αλλά και πάλι ας προσέξουμε ότι το σχήμα αυτό:

ροπή ζεύγους F-$F_2 \rightarrow$ γωνιακή επιτάχυνση.

Δύναμη $F_1 \rightarrow$ επιτάχυνση κέντρου μάζας.

Μπορεί να είναι βολικό, αλλά χρησιμοποιούμε δυο υποθετικές δυνάμεις F_1-F_2 οι οποίες προφανώς δεν υπάρχουν.

Συμπέρασμα:

Χρειάζεται προσοχή όταν μελετάμε την περιστροφή ενός στερεού γύρω από άξονα. Τι άξονας είναι αυτός;

Αν είναι ένας πραγματικός άξονας, τότε μπορεί να ασκεί δύναμη στο στερεό. Προσέξτε δεν είναι υποχρεωτική η δύναμη αυτή. Μπορεί να είναι και μηδενική.

Αν όμως ο άξονας είναι νοητός, προφανώς δεν μπορεί να ασκεί δύναμη!!!

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης