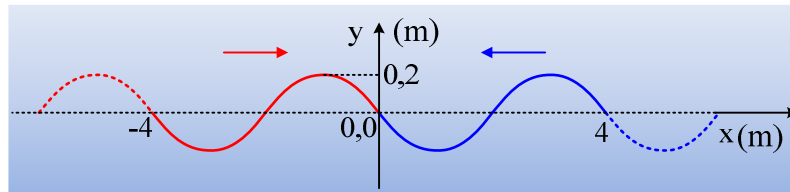


Ένα στάσιμο κύμα με δεσμό στην αρχική θέση.



Κατά μήκος ενός ελαστικού μέσου διαδίδονται αντίθετα δύο κύματα με το ίδιο πλάτος $A=0,2\text{m}$ και το ίδιο μήκος κύματος $\lambda=4\text{m}$ και τη στιγμή $t=0$ τα δυο κύματα φτάνουν ταυτόχρονα σε ένα σημείο O , το οποίο θεωρούμε αρχή του άξονα ($x=0$). Η μορφή του μέσου τη στιγμή αυτή, εμφανίζεται στο παραπάνω σχήμα. Τα κύματα διαδίδονται με ταχύτητα $v=2\text{m/s}$.

- i) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων.
- ii) Να βρεθεί η εξίσωση του στάσιμου κύματος που προκύπτει από την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.
- iii) Να σχεδιάσετε στιγμιότυπα του στάσιμου κύματος τις χρονικές στιγμές $t_1=2\text{s}$ και $t_2=3\text{s}$ και για την περιοχή που έχει σχηματισθεί το στάσιμο κύμα, στο ίδιο διάγραμμα.
- iv) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της δύναμης που ασκείται σε μια σημειακή μάζα Σ , μάζας $m=1\text{mg}$, η οποία βρίσκεται στη θέση $x_1=3\text{m}$, σε συνάρτηση με το χρόνο.

Απάντηση:

- i) Με βάση το σχήμα $\lambda=4\text{m}$, ενώ $v=\lambda f \rightarrow f=v/\lambda=0,5\text{Hz}$ και $T=2\text{s}$.

Για το κύμα προς τα δεξιά, το σημείο O στη θέση $x=0$ ξεκινά την ταλάντωσή του από τη θέση ισορροπίας κινούμενο προς τα πάνω (θετική κατεύθυνση), συνεπώς:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right) \rightarrow y_1 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right) \text{ μονάδες στο S.I. και } x \leq 2t \text{ (m)}$$

Εξάλλου το O , εξαιτίας του κύματος προς τα αριστερά ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα κάτω (αρνητική κατεύθυνση), συνεπώς η εξίσωση ταλάντωσής του θα είναι της μορφής $y = A \cdot \eta\mu(\omega t + \pi)$, οπότε η εξίσωση του κύματος προς τα αριστερά έχει εξίσωση:

$$y_2 = A \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{T} + \frac{x}{\lambda} + \frac{1}{2} \right) \rightarrow y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) \text{ μονάδες στο S.I. και } x \geq -2t \text{ (m)}$$

- ii) Με βάση την αρχή της επαλληλίας μετά την συμβολή των δύο κυμάτων, κάθε σημείο ταλαντώνεται με απομάκρυνση:

$$y = y_1 + y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} - \frac{x}{4} \right) + 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot 2\sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{\frac{t}{2} - \frac{x}{4} - \frac{t}{2} - \frac{x}{4} - \frac{1}{2}}{2} \eta\mu 2\pi \frac{\frac{t}{2} - \frac{x}{4} + \frac{t}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}}{2} \rightarrow$$

$$y = 0,4\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4}\right) \text{ μονάδες στο S.I. με } t \geq 0 \text{ και } -2t \leq x \leq 2t$$

iii) Τη στιγμή $t_1=2s$ στάσιμο κύμα έχει δημιουργηθεί στην περιοχή $-2t \leq x \leq 2t$ ή $-4m \leq x \leq 4m$, οπότε με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος παίρνουμε:

$$y = 0,4\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{2}{2} + \frac{1}{4}\right) = 0,4\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot \eta\mu\left(2\pi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 0,4\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) = -0,4 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

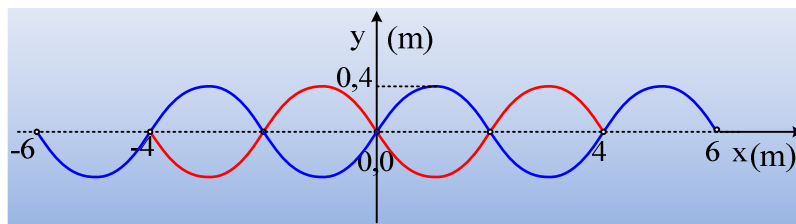
Και η αντίστοιχη γραφική παράσταση είναι η κόκκινη καμπύλη.

Αντίστοιχα τη στιγμή $t_2=3s$, στάσιμο κύμα υπάρχει στην περιοχή $-2t \leq x \leq 2t$ ή $-6m \leq x \leq 6m$, οπότε με αντικατάσταση στην εξίσωση του κύματος παίρνουμε:

$$y = 0,4\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{3}{2} + \frac{1}{4}\right) = 0,4\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) \cdot \eta\mu\left(3\pi + \frac{\pi}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = -0,4\sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4}\right) = 0,4 \cdot \eta\mu\left(\frac{\pi x}{2}\right)$$

Με γραφική παράσταση την μπλε καμπύλη.



iv) Το κύμα που κινείται προς τα αριστερά χρειάζεται χρόνο $\Delta t = \frac{d}{v} = \frac{3m}{2m/s} = 1,5s$ για να διαδοθεί από το

σημείο Σ στο Ο, συνεπώς το σημείο Σ, ξεκίνησε την ταλάντωσή του τη χρονική στιγμή $t_3=-1,5s$. Εξάλλου το κύμα προς τα δεξιά θα φτάσει στο Σ τη στιγμή $t_4=1,5s$.

Συνεπώς στο χρονικό διάστημα $-1,5s \leq t \leq 1,5s$ το σημείο ταλαντώνεται με εξίσωση απομάκρυνσης:

$$y_2 = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{x}{4} + \frac{1}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{3}{4} + \frac{1}{2}\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{5}{4}\right),$$

οπότε η επιτάχυνση του Σ, δίνεται από την εξίσωση

$$a = -A\omega^2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{5}{4}\right) = -0,2 \cdot \pi^2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{5}{4}\right) \rightarrow$$

$$a \approx -2 \cdot \eta\mu\left(\pi + \frac{5\pi}{2}\right) = -2 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi)$$

$$\text{Και η δύναμη } F = ma = -2 \cdot 10^{-6} \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi)$$

Από τη στιγμή της συμβολής, δηλαδή $t \geq 1,5\text{s}$, η αντίστοιχη απομάκρυνση θα είναι:

$$y = 0,4 \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right) = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{3}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right) \rightarrow$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right)$$

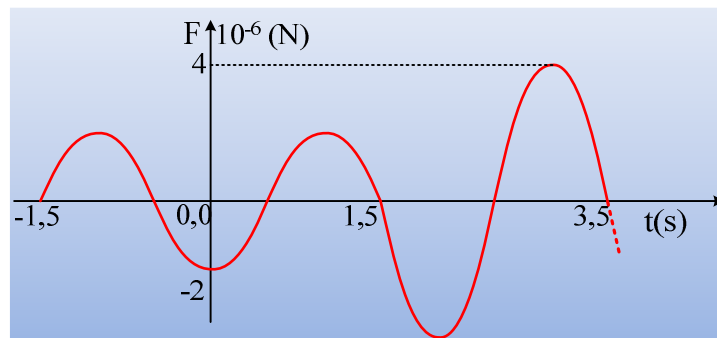
Οπότε η αντίστοιχη επιτάχυνση θα έχει τη μορφή:

$$a = -A\omega^2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right) = -0,4 \cdot \pi^2 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right) \rightarrow$$

$$a = -4 \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right) \rightarrow a \approx -4 \cdot \eta\mu \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) = -4 \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi) \quad (\text{S.I})$$

$$\text{Και η δύναμη } F = ma = -4 \cdot 10^{-6} \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi) \quad (\text{S.I.})$$

Με βάση αυτά η γραφική παράσταση είναι όπως στο παρακάτω σχήμα



Σχόλια:

Η εξίσωση του στάσιμου κύματος $y = 0,4 \sigma\upsilon\nu 2\pi \left(\frac{x}{4} + \frac{1}{4} \right) \cdot \eta\mu 2\pi \left(\frac{t}{2} + \frac{1}{4} \right)$ μπορεί να γραφεί:

$$y = 0,4 \cdot \sigma\upsilon\nu \left(\frac{\pi x}{2} + \frac{\pi}{2} \right) \cdot \eta\mu \left(\pi + \frac{\pi}{2} \right) = -0,4 \cdot \eta\mu \left(\frac{\pi x}{2} \right) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi) \quad \text{ή}$$

$$y = 0,4 \cdot \eta\mu \left(\frac{\pi x}{2} \right) \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi + \pi)$$

Βλέπουμε δηλαδή ότι το πλάτος ταλάντωσης είναι ημιτονοειδής συνάρτηση του x και όχι συνημιτονοειδής, όπως η εξίσωση του βιβλίου. Το αποτέλεσμα βέβαια είναι στην θέση $x=0$, να δημιουργείται δεσμός και όχι κοιλία και κατά συνέπεια να έχουμε σε άλλες θέσεις τους δεσμούς και τις κοιλίες.

Αλλά πότε ισχύει η εξίσωση του βιβλίου μας; Όταν τα δυο κύματα τη στιγμή $t=0$ φτάνουν στη θέση $x=0$ και το σημείο αυτό εξαιτίας και των δύο κυμάτων αρχίζει να ταλαντώνεται προς τη θετική κατεύθυνση.

Αν δοθεί λοιπόν, ότι τα δύο κύματα φτάνουν ταυτόχρονα στη θέση $x=0$, τη στιγμή $t=0$, αλλά εξαιτίας του ενός το σημείο O , ξεκινά να ταλαντώνεται προς την θετική κατεύθυνση, αλλά εξαιτίας του άλλου προς την αρνητική, η κατάσταση, είναι αυτή που μελετήσαμε στην παραπάνω άσκηση.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης