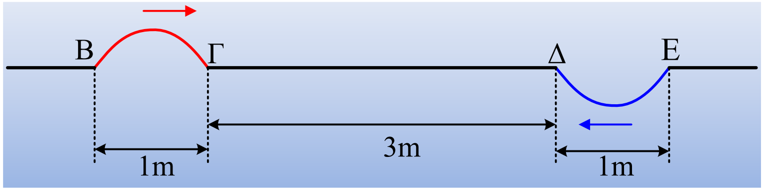
Διάδοση και συμβολή δύο παλμών.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου διαδίδονται με αντίθετη κατεύθυνση δυο αρμονικοί παλμοί πλάτους Α=0,2m με ταχύτητα 1m/s και κάποια στιγμή που θεωρούμε t=0, απέχουν κατά 3m, ενώ η εικόνα του μέσου, είναι αυτή του παρακάτω σχήματος.



i) Λαμβάνοντας την θέση Γ σαν αρχή του άξονα (x=0) να βρείτε τις εξισώσεις y=f(t,x) που περιγράφουν τους παραπάνω παλμούς.

ii) Να γράψετε την εξίσωση y=f(t,x) για το αποτέλεσμα της συμβολής των παραπάνω παλμών.

iii) Να σχεδιάστε τη μορφή του μέσου τη χρονική στιγμή t_1=2s. Σε δύο παράλληλα σχήματα, να σχεδιάστε επίσης τη μορφή του μέσου, αν:

α) Στο μέσον διαδιδόταν μόνο η κυματομορφή που διαδίδεται προς τα δεξιά

β) Στο μέσον διαδιδόταν μόνο η άλλη κυματομορφή.

iv) Να υπολογιστούν την παραπάνω χρονική στιγμή, οι ταχύτητες ταλάντωσης τριών σημείων του μέσου, Κ, Λ και Μ, στις θέσεις x_1=1m, x_2=1,5m και x_3=2m αντίστοιχα.

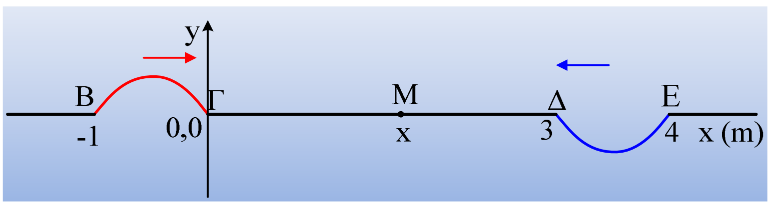
Απάντηση:

i) Από την εξίσωση του κύματος, με δεδομένο ότι λ=2m , βρίσκουμε $\upsilon = \lambda f \to f = \frac{\upsilon}{\lambda} = \frac{1}{2}Hz = 0{,}5Hz$

ή Τ=2s, συνεπώς η εξίσωση που περιγράφει την κυματομορφή που διαδίδεται προς τα δεξιά, θα είναι της μορφής:

$$y_1 = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2}\right) \quad \text{(S.I.)} \quad (1)$$

με $t \geq 0$ και $\upsilon t - \lambda/2 \leq x \leq \upsilon t$ ή $t-1 \leq x \leq t$



Εξάλλου το σημείο Δ ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα κάτω (αρνητική κατεύθυνση) συνεπώς η εξίσωση της απομάκρυνσής του είναι $y_\Delta = A \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T} + \pi\right)$ και θα λειτουργήσει σαν πηγή της κυματομορφής που διαδίδεται προς τα αριστερά. Συνεπώς για ένα τυχαίο σημείο Μ που βρίσκεται στη θέση x (αριστερά του Δ) η εξίσωση της απομάκρυνσής του θα είναι:

$$y_2 = A \cdot \eta\mu\left(\omega\left(t - t_1\right) + \pi\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(\omega\left(t - \frac{3-x}{\upsilon}\right) + \pi\right) \text{ ή}$$

$$y_2 = 0{,}2 \cdot \eta\mu\left(2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{x}{2} - \frac{3}{2}\right) + \pi\right) \rightarrow$$

$$y_2 = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{x}{2} - 1\right) \quad \text{(S.I.)} \quad (2)$$

με $t \geq 0$ και $3\text{-}\upsilon t \leq x \leq 4\text{-}\ \upsilon t$ ή $3\text{-}t \leq x \leq 4\text{-}t$

ii) Με βάση την αρχή της επαλληλίας έχουμε:

$$y = y_1 + y_2 = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{x}{2}\right) + 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} + \frac{x}{2} - 1\right) \rightarrow$$

$$y = 2 \cdot 0{,}2 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{\frac{t}{2} - \frac{x}{2} - \frac{t}{2} - \frac{x}{2} + 1}{2} \cdot \eta\mu 2\pi \frac{\frac{t}{2} - \frac{x}{2} + \frac{t}{2} + \frac{x}{2} - 1}{2} \rightarrow$$

$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x-1}{2} \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right) \quad \text{(S.I.)} \quad (3)$$

με $1{,}5s \leq t \leq 2{,}5s$ ενώ το x παίρνει τιμές που ανήκουν στην τομή των περιοχών: $t\text{-}1 \leq x \leq t$ και $3\text{-}t \leq x \leq 4\text{-}t$

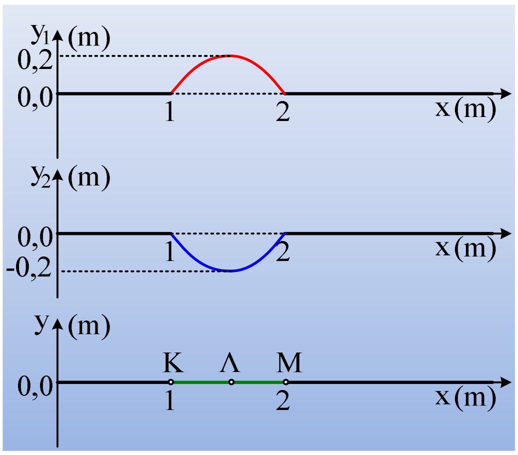
iii) Με αντικατάσταση στις σχέσεις (1), (2) και (3) παίρνουμε:

$$y_1 = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{2}{2} - \frac{x}{2}\right) = -0{,}2 \cdot \eta\mu\pi x \text{ με } t\text{-}1 \leq x \leq t \text{ ή } 1m \leq x \leq 2m$$

$$y_2 = 0{,}2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{2}{2} + \frac{x}{2} - 1\right) = 0{,}2 \cdot \eta\mu\pi x \text{ με } 3\text{-}t \leq x \leq 4\text{-}t \text{ ή } 1m \leq x \leq 2m$$

$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{x-1}{2} \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{2}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0 \text{ με } 1m \leq x \leq 2m$$

Στο διπλανό σχήμα εμφανίζονται οι αντίστοιχες γραφικές παραστάσεις. Μπορούμε να δούμε ότι οι δύο παλμοί βρίσκονται στην ίδια περιοχή του χώρου και από την συμβολή τους, προκύπτει απόσβεση, αφού οι δύο παλμοί έχουν αντίθετες απομακρύνσεις, σε κάθε θέση.



iv) Για το σημείο Κ έχουμε:

$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{1-1}{2} \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 0{,}4 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right) \to \upsilon = 0{,}4 \cdot \pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right) \to$$

$$\upsilon = 0{,}4 \cdot \pi \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi\left(\frac{1}{2}\right) = -0{,}4 \cdot \pi \ \text{ m/s}$$

Για το σημείο Λ:

$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{1{,}5-1}{2} \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right) = 0$$ για κάθε t, οπότε και υ=0.

Για το σημείο Μ:

$$y = 0{,}4 \cdot \sigma\upsilon\nu 2\pi \frac{2-1}{2} \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\right) = -0{,}4 \cdot \eta\mu(\pi t - \pi) = 0{,}4 \cdot \eta\mu(\pi t) \to$$

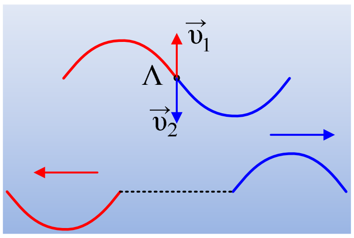
$$\upsilon = 0{,}4 \cdot \pi \cdot \sigma\upsilon\nu(\pi t) = +0{,}4 \cdot \pi \ \text{ m/s}$$

Σχόλια:

Η παραπάνω ανάλυση στηρίχθηκε στην λογική ότι στο μέσον διαδίδονται δύο κύματα, όπου η διάδοση του ενός δεν επηρεάζει την διάδοση του άλλου. Έτσι το αποτέλεσμα της συμβολής, προέκυψε με βάση την αρχή της επαλληλίας, από όπου βρήκαμε την εξίσωση (3), μια εξίσωση στάσιμου κύματος. Σε αυτό το «στάσιμο» το σημείο Λ, στη θέση x=1,5m, στο οποίο συναντώνται τα δύο κύματα, αντιστοιχεί σε δεσμό του στάσιμου, ενώ τα σημεία Κ και Μ σε κοιλίες!

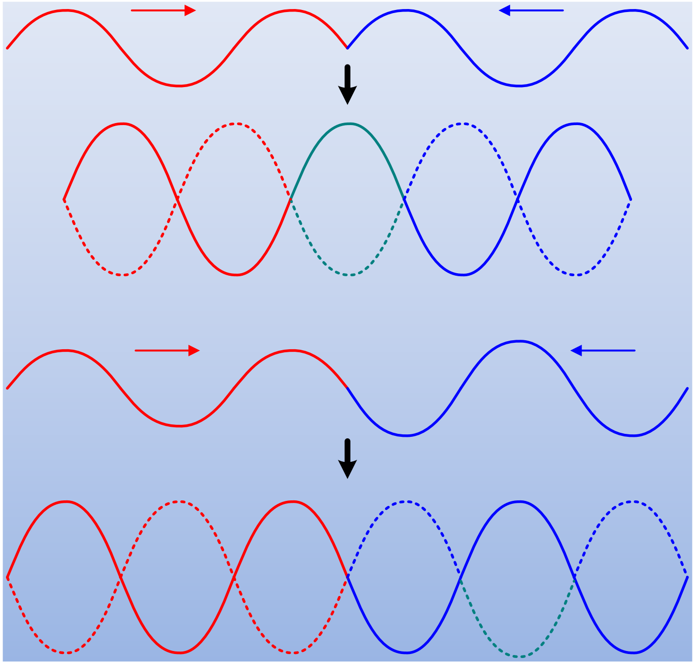
Είναι έτσι;

Ας πάρουμε τη στιγμή που συναντώνται τα δύο κύματα στο Λ. Με βάση το σχήμα:



Το σημείο Λ παραμένει συνεχώς ακίνητο, οπότε εκεί ανακλώνται τα δύο κύματα, με τον ίδιο τρόπο, που θα είχαμε ανάκλαση σε έναν τοίχο, με μεταβολή στη φάση κατά π.

Το ίδιο βέβαια συμβαίνει και κατά την συνάντηση δύο αντιθέτως κινουμένων κυμάτων. Αν στο σημείο συνάντησης τα δυο κύματα συμβάλουν σε φάση, τότε στο σημείο αυτό έχουμε ενίσχυση, ενώ αντίθετα αν τα κύματα φτάνουν σε αντίθεση φάσης, τότε το σημείο αυτό θα παραμένει ακίνητο και τα δύο κύματα ανακλώνται στο σημείο αυτό. Δείτε το παρακάτω σχήμα:



Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης