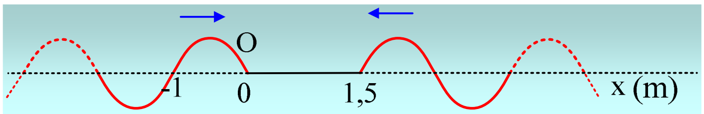
Δύο τρέχοντα και ένα στάσιμο κύμα.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου που θεωρούμε ότι ταυτίζεται με τον άξονα x, διαδίδονται δύο όμοια κύματα πλάτους Α=0,1m, τα οποία διαδίδονται αντίθετα. Τη στιγμή t=0 το πρώτο κύμα φτάνει στο σημείο Ο, στη θέση x=0, ενώ το δεύτερο απέχει κατά 1,5m από το Ο, όπως στο σχήμα.



Αν το Ο θα φτάσει σε μέγιστη απομάκρυνση για πρώτη φορά τη στιγμή t΄=0,25s, ζητούνται:

i) Να γράψετε τις εξισώσεις των δύο τρεχόντων κυμάτων.

ii) Να γράψετε την εξίσωση του στάσιμου κύματος που θα προκύψει μετά την συμβολή των δύο παραπάνω κυμάτων.

iii) Να βρείτε τη χρονική στιγμή t_1=2s, πόσοι δεσμοί και σε ποιες θέσεις έχουν σχηματισθεί.

iv) Να κάνετε το στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος και για την περιοχή που έχει σχηματισθεί, τη στιγμή t_1.

Απάντηση:

i) Το σημείο Ο θα φτάσει σε μέγιστη απομάκρυνση τη στιγμή t΄=Τ/4=0,25s, συνεπώς Τ=1s, ενώ με βάση το σχήμα λ=2m, οπότε $\upsilon=\frac{\lambda}{T}=2m/s$. Έτσι το κύμα προς τα δεξιά θα έχει εξίσωση:

$$y_1=0,1\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{1}-\frac{x}{2}\right)=0,1\cdot \eta\mu 2\pi\left(t-\frac{x}{2}\right) \text{ (S.I.) με } t\geq 0 \text{ και } x\leq 2t \text{ (m)}$$

Εξάλλου το σημείο στο οποίο φτάνει το κύμα προς τα αριστερά, αρχίζει την ταλάντωσή του ξεκινώντας από την θέση ισορροπίας και κινείται προς τα πάνω (όπου θεωρούμε θετικές τιμές της απομάκρυνσης), οπότε θα έχει εξίσωση απομάκρυνσης $y=0,1\cdot \eta\mu 2\pi t$ (μονάδες στο S.I.). Όμως το κύμα αυτό, θα φτάσει σε ένα τυχαίο σημείο, στη θέση x τη στιγμή $t''=\frac{1,5-x}{\upsilon}=\frac{1,5-x}{2}$, συνεπώς η εξίσωση της απομάκρυνσης του τυχαίου αυτού σημείου (και κατά συνέπεια η εξίσωση του κύματος προς τα αριστερά θα είναι:

$$y_2=0,1\cdot \eta\mu 2\pi\left(t-t''\right)=0,1\cdot \eta\mu 2\pi\left(t-\frac{1,5-x}{2}\right)\rightarrow$$

$$y_2=0,1\cdot \eta\mu 2\pi\left(t+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right) \text{(S.I.) με } t\geq 0 \text{ και } x\geq 1,5\text{- } 2t \text{ (m)}$$

ii) Με βάση την αρχή της επαλληλίας παίρνουμε:

$$y=y_1+y_2=0,1\cdot \eta\mu 2\pi\left(t-\frac{x}{2}\right)+0,1\cdot \eta\mu 2\pi\left(t+\frac{x}{2}-\frac{3}{4}\right)\rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot συν2π\left(\frac{t + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} - t + \frac{x}{2}}{2}\right) \cdot ημ2π\left(\frac{t + \frac{x}{2} - \frac{3}{4} + t - \frac{x}{2}}{2}\right) \rightarrow$$

$$y = 0,2 \cdot συν2π\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{8}\right) \cdot ημ2π\left(t - \frac{3}{8}\right) \text{ (μονάδες στο S.I.)}$$

Με πεδίο ορισμού $t \geq \frac{d}{υ}$ όπου d= $\frac{1,5m}{2} \rightarrow t \geq 0,375s$ και $1,5\text{-}2t \leq x \leq 2t$

iii) Τη στιγμή t_1=2s έχει δημιουργηθεί στάσιμο κύμα στην περιοχή:

$$1,5\text{-}2t \leq x \leq 2t \rightarrow -2,5m \leq x \leq 4m \quad (1)$$

Δεσμοί όμως είναι τα σημεία για τα οποία $\left|0,2 \cdot συν2π\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{8}\right)\right| = 0 \rightarrow$

$$2π\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{8}\right) = (2k+1)\frac{π}{2} \rightarrow x = (2k+1)\frac{1}{2} + \frac{3}{4} \rightarrow x = k + \frac{5}{4}$$

Και με βάση την (1) $-2,5 \leq k + \frac{5}{4} \leq 4 \rightarrow -3,75 \leq k \leq 2,75$ ή k=-3, -2, -1, 0, 1, 2

Έχουν σχηματιστεί δηλαδή 6 δεσμοί, στις θέσεις:

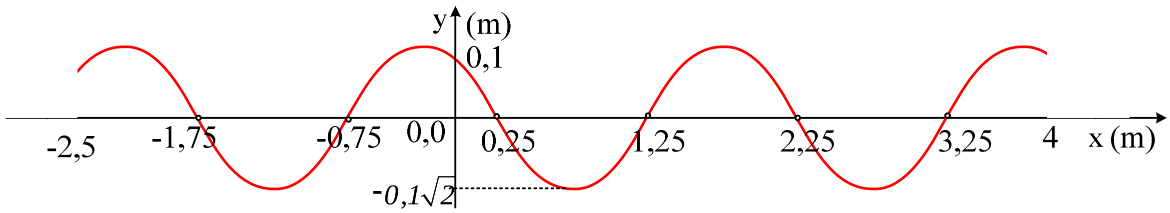
$$x = k + \frac{5}{4} \rightarrow x = -1,75m,\ -0,75m,\ 0,25m,\ 1,25m,\ 2,25m,\ και\ 3,25m$$

iv) Θέτοντας t=2s στην εξίσωση του στάσιμου $y = 0,2 \cdot συν2π\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{8}\right) \cdot ημ2π\left(t - \frac{3}{8}\right)$ παίρνουμε:

$$y = 0,2 \cdot συν2π\left(\frac{x}{2} - \frac{3}{8}\right) \cdot ημ2π\left(2 - \frac{3}{8}\right) = 0,2 \cdot συν\left(πx - \frac{3π}{4}\right) \cdot ημ\left(4π - \frac{3π}{4}\right) \rightarrow$$

$$y = -0,1\sqrt{2} \cdot συν\left(πx - \frac{3π}{4}\right) \text{ με } -1,5m \leq x \leq 4m$$

Και το ζητούμενο στιγμιότυπο είναι το παρακάτω.



Σχόλιο:

Αξίζει να προσεχθεί ότι την στιγμή t_1, οι κοιλίες δεν βρίσκονται σε μέγιστη απομάκρυνση, όσο είναι, το πλάτος του στάσιμου, (0,2m).

Εξάλλου η κατάσταση είναι απολύτως συμμετρική ως προς τη θέση x_1=0,75m= 1,5/2 m και όχι προφανώς ως προς την αρχή Ο του άξονα. Θα μπορούσε κανείς να σκεφτεί, ότι τα δύο κύματα πρωτοσυναντώνται στο σημείο με x_1=0,75m, το οποίο υποχρεώνουν να κινηθεί προς τα πάνω. Με άλλα λόγια στο σημείο αυτό τα κύματα συμβάλλουν σε φάση, οπότε δημιουργείται κοιλία και από εκεί και πέρα η κατάσταση είναι απολύτως συμμετρική, ως προ το σημείο αυτό.

Πρακτικά βέβαια κάποιος, θα μπορούσε και να βρει τις θέσεις των δεσμών, μόνο με αυτήν την παρατήρηση, αφού οι δυο πρώτοι θα απείχαν από την παραπάνω θέση κατά λ/4=0,5m, οπότε θα έβρισκε τους δεσμούς στις θέσεις 0,25m και 1,25m.

Στη συνέχεια προσθέτοντας λ/2 (η απόσταση δύο διαδοχικών δεσμών) να προσδιόριζε και τις θέσεις των υπολοίπων, στην περιοχή βέβαια που θα έχει υπάρξει συμβολή ($-2,5m \le x \le 4m$)

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης