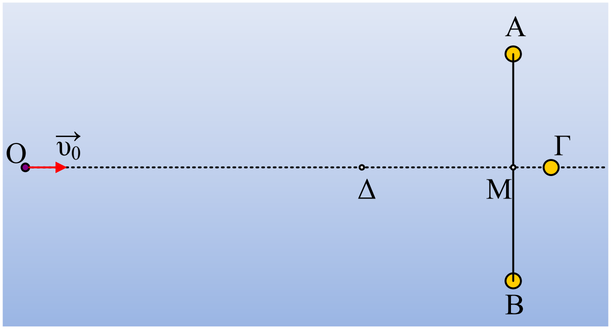
Μια εκτόξευση και η μέγιστη ταχύτητα.

Σε ένα λείο οριζόντιο επίπεδο είναι στερεωμένες τρεις μικρές φορτισμένες σφαίρες Α, Β και Γ, με φορτία $q_1=q_2=+5\mu C$ και q_3 αντίστοιχα, όπως στο σχήμα, όπου (ΑΒ)=60cm, ενώ η Γ βρίσκεται πάνω στην μεσοκάθετο της ΑΒ, σε απόσταση (ΜΓ)=10cm από το μέσον της Μ. Από μεγάλη απόσταση, στο ίδιο οριζόντιο επίπεδο, εκτοξεύεται ένα μικρό σφαιρίδιο μάζας m=11,4g και φορτίου q=-5μC με κατεύθυνση προς το σημείο Μ. Παρατηρούμε ότι το σφαιρίδιο κινείται κατά μήκος της μεσοκαθέτου του ΑΒ, επιταχυνόμενο, μέχρι ένα σημείο Δ, όπου (ΔΜ)=40cm, ενώ στη συνέχεια επιβραδύνεται έντονα και αλλάζει κατεύθυνση κίνησης φτάνοντας στο Μ.

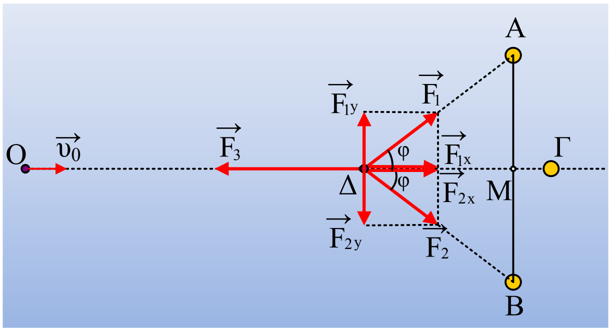


i) Να βρεθεί το φορτίο της σφαίρας Γ.

ii) Να υπολογιστεί η μέγιστη ταχύτητα που απέκτησε το σφαιρίδιο κατά την κίνησή του.

iii) Με πόση αρχική κινητική ενέργεια εκτοξεύθηκε το σφαιρίδιο;

Απάντηση:



i) Στο σχήμα έχουμε σχεδιάσει απωστική την δύναμη F_3, πράγμα που σημαίνει ότι $q_3<0$, αφού μόνο τότε θα είχαμε επιβράδυνση του σφαιριδίου μεταξύ των σημείων Δ και Μ. Σε αντίθετη περίπτωση το σφαιρίδιο θα συνέχιζε να επιταχύνεται.

Κατά την κίνησή του το σφαιρίδιο δέχεται δυο δυνάμεις από τις σφαίρες Α και Β, ίσου μέτρου:

$$F_1 = F_2 = k\frac{|qq_1|}{r^2}$$

Η συνισταμένη των οποίων είναι πάνω στη μεσοκάθετο, αφού $F_{1y}=F_{2y}=F_1\cdot$ημφ. Συνεπώς το σφαιρίδιο εκτοξεύθηκε με αρχική ταχύτητα στη διεύθυνση της μεσοκαθέτου και συνέχισε να κινείται με την επίδραση των δυνάμεων F_{1x}, F_{2x} και F_3 ευθύγραμμα. Με βάση την εκφώνηση μέχρι το σημείο Δ επιταχύνεται, οπότε $F_{1x}+F_{2x} > F_3$ ενώ μετά επιβραδύνεται, άρα $F_{1x}+F_{2x} < F_3$, άρα στο σημείο Δ θα έχει τη μέγιστη ταχύτητα και θα ισχύει:

$$F_{1x}+F_{2x} = F_3 \rightarrow k\frac{|qq_1|}{r^2}\sigma\upsilon\nu\varphi + k\frac{|qq_2|}{r^2}\sigma\upsilon\nu\varphi = k\frac{|qq_3|}{r_3^{\,2}} \quad (1)$$

Αλλά από το Π.Θ. στο ορθογώνιο τρίγωνο ΔΜΑ παίρνουμε:

$$(A\Delta) = r = \sqrt{(AM)^2 + (\Delta M)^2} = \sqrt{0{,}3^2 + 0{,}4^2}\,m = 0{,}5m$$

Ενώ επίσης $r_3=(\Delta M)+(M\Gamma)=0{,}5m$ και η (1) γίνεται:

$$k\frac{|qq_1|}{r^2}\sigma\upsilon\nu\varphi + k\frac{|qq_2|}{r^2}\sigma\upsilon\nu\varphi = k\frac{|qq_3|}{r^{\,2}} \rightarrow |q_1|\frac{(\Delta M)}{(\Delta A)} + |q_2|\frac{(\Delta M)}{(\Delta A)} = |q_3| \rightarrow$$

$$|q_3| = 2|q_1|\frac{(\Delta M)}{(\Delta A)} = 2\cdot 5\cdot 10^{-6}C\cdot\frac{40cm}{50cm} = 8\cdot 10^{-6}C$$ οπότε $q_3=-8\cdot 10^{-6}C$.

ii) Με βάση όσα έχουν αναφερθεί την μέγιστη ταχύτητα το σφαιρίδιο την απέκτησε στο σημείο Δ, ενώ στο Μ μηδενίστηκε στιγμιαία η ταχύτητά του, αφού μετά κινήθηκε με αντίθετη κατεύθυνση. Εφαρμόζουμε το Θ.Μ.Κ.Ε. μεταξύ των θέσεων Δ και Μ και παίρνουμε:

$$K_M - K_\Delta = W_{\Delta\rightarrow M} \rightarrow$$

$$0 - \frac{1}{2}m\upsilon_{\max}^2 = q(V_\Delta - V_M) \rightarrow$$

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{2q}{m}\left[\left(k\frac{q_1}{(AM)} + k\frac{q_2}{(BM)} + k\frac{q_3}{(M\Gamma)}\right) - \left(k\frac{q_1}{(A\Delta)} + k\frac{q_2}{(B\Delta)} + k\frac{q_3}{(\Delta\Gamma)}\right)\right]}$$

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{2kq}{m}\left(\frac{2q_1}{(AM)} + \frac{q_3}{(M\Gamma)} - \frac{q_1+q_2+q_3}{(A\Delta)}\right)} \rightarrow$$

$$\upsilon_{\max} = \sqrt{\frac{2\cdot 9\cdot 10^9\cdot(-5\cdot 10^{-6})}{11{,}4\cdot 10^{-3}}\left(\frac{2\cdot 5\cdot 10^{-6}}{0{,}3} + \frac{-8\cdot 10^{-6}}{0{,}1} - \frac{5\cdot 10^{-6} + 5\cdot 10^{-6} - 8\cdot 10^{-6}}{0{,}5}\right)}\,m/s \rightarrow$$

$$\upsilon_{\max} = 20m/s$$

iii) Εφαρμόζουμε τώρα ξανά το ΘΜΚΕ από την αρχική θέση (πολύ μεγάλη απόσταση σημαίνει πρακτικά, άπειρο) μέχρι τη θέση Μ, όπου υ=0 και παίρνουμε:

$$K_M - K_\infty = W_{\infty\rightarrow M} \rightarrow$$

$$0 - K_o = q(V_\infty - V_M) \rightarrow$$

$$-K_o = -qV_M \rightarrow$$

$$K_o = q\left(k\frac{q_1}{(AM)} + k\frac{q_2}{(BM)} + k\frac{q_3}{(M\Gamma)}\right) \rightarrow$$

$$K_o = kq\left(\frac{2q_1}{(AM)} + \frac{q_3}{(M\Gamma)}\right) = 9\cdot 10^9(-5\cdot 10^{-6})\cdot\left(\frac{2\cdot 5\cdot 10^{-6}}{0{,}3} + \frac{-8\cdot 10^{-6}}{0{,}1}\right)J \text{ ή}$$

$$K_o = 2{,}1J$$

Σχόλιο:

Στα ίδια αποτελέσματα θα καταλήγαμε, αν αντί να εφαρμόσουμε το θεώρημα μεταβολής της κινητικής ενέργεια του σφαιριδίου μεταξύ του Δ και Μ ή μεταξύ αρχικής (στο άπειρο) και τελικής θέσης στο Μ, εφαρμόζαμε την διατήρηση της μηχανικής ενέργειας, αφού η μόνη δύναμη που παράγει έργο, είναι η ηλεκτροστατική δύναμη του πεδίου, δύναμη συντηρητική.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια

Διονύσης Μάργαρης