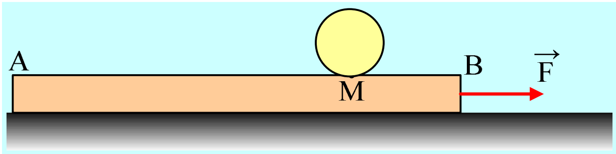
Μια σφαίρα που κυλίεται περίεργα.

Σε λείο οριζόντιο επίπεδο ηρεμεί μια σανίδα ΑΒ μάζας Μ=1kg και πάνω της μια σφαίρα ακτίνας R=0,1m και μάζας m=1kg, σε απόσταση d=2,5m από το άκρο της Α. Για t=0 ασκούμε στη σανίδα οριζόντια δύναμη F=9Ν και παρατηρούμε ότι η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει πάνω στη σανίδα.



i) Να σημειώστε τις δυνάμεις που ασκούνται στη σανίδα. Η ασκούμενη τριβή είναι στατική ή τριβή ολίσθησης;

ii) Παρατηρούμε ότι η σφαίρα στρέφεται αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού και κινείται προς το άκρο Α. Μπορείτε να εξηγήσετε γιατί συμβαίνει αυτό;

iii) Αφού η σφαίρα δεν ολισθαίνει, ποια είναι κάθε στιγμή η ταχύτητα του σημείου επαφής της σφαίρας με τη σανίδα Μ;

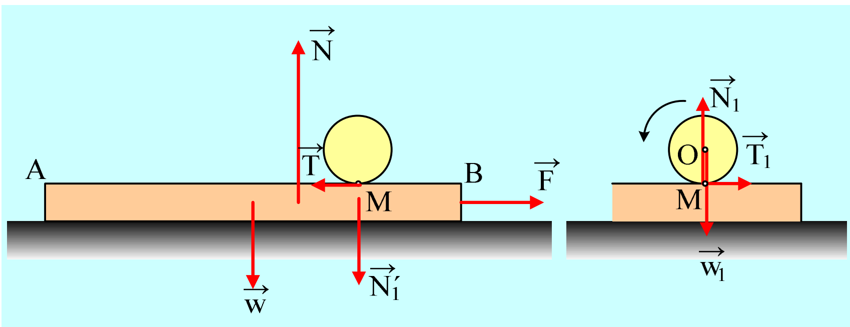
iv) Να υπολογίσετε την επιτάχυνση της σανίδας και τη γωνιακή επιτάχυνση της σφαίρας.

v) Σε πόσο χρόνο η σφαίρα εγκαταλείπει τη σανίδα;

Δίνεται η ροπή αδράνειας της σφαίρας ως προς τον άξονα περιστροφής της $I = 2/5\ mR^2$.

Απάντηση:

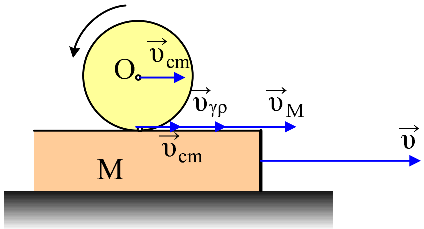
i) Η σανίδα μόλις ασκηθεί πάνω της η οριζόντια δύναμη $\vec{F}$, τείνει να κινηθεί προς τα δεξιά ως προς τη σφαίρα, συνεπώς θα δεχτεί δύναμη τριβής προς τ' αριστερά. Έτσι οι ασκούμενες στα σώματα δυνάμεις είναι αυτές που εμφανίζονται στο παρακάτω σχήμα.



Αφού η σφαίρα κυλίεται χωρίς να ολισθαίνει η τριβή είναι στατική.

ii) Η τριβή που ασκείται στη σφαίρα T_1 έχει κατεύθυνση προς τα δεξιά (αντίδραση της Τ), συνεπώς θα προκαλέσει μεν επιτάχυνση του κέντρου της Ο προς τα δεξιά, αλλά η ροπή της θα προκαλέσει γωνιακή επιτάχυνση κάθετη στο επίπεδο της σελίδας με φορά προς τα έξω, με αποτέλεσμα η σφαίρα να αποκτήσει γωνιακή ταχύτητα στρεφόμενη αντίθετα από τους δείκτες του ρολογιού.

iii) Αφού δεν παρατηρείται ολίσθηση της σφαίρας πάνω στη σανίδα, σημαίνει ότι το σημείο Μ της σφαίρας έχει κάθε στιγμή την ίδια ταχύτητα με τη σανίδα. Ή να το πούμε διαφορετικά δεν έχει ταχύτητα ως προς τη σανίδα. Η σφαίρα όμως εκτελεί σύνθετη κίνηση, η οποία μπορεί να θεωρηθεί σαν σύνθεση μιας μεταφορικής με ταχύτητα υ_{cm} και μιας στροφικής γύρω από τον άξονά της με γωνιακή ταχύτητα ω. Αλλά τότε, η ταχύτητα του σημείου Μ της σφαίρας είναι το διανυσματικό άθροισμα της υ_{cm} λόγω της μεταφορικής κίνησης και της $\upsilon_{\gamma\rho}$ εξαιτίας της κυκλικής κίνησης του Μ, που οφείλεται στην περιστροφή της σφαίρας. Με βάση αυτά έχουμε:



$$\upsilon = \upsilon_M = \upsilon_{cm} + \upsilon_{\gamma\rho} \text{ ή}$$

$$\upsilon = \upsilon_{cm} + \omega R \text{ ή}$$

$$\frac{d\upsilon}{dt} = \frac{d\upsilon_{cm}}{dt} + \frac{d\omega}{dt} R \text{ ή}$$

$$\alpha = \alpha_{cm} + \alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R \quad (1)$$

iv) Από το 2° νόμο του Νεύτωνα για τη σανίδα έχουμε: $F - T = M \cdot \alpha$ (2)

Για τη μεταφορική κίνηση της σφαίρας: $T_1 = m \cdot \alpha_{cm}$ (3)

Για τη στροφική κίνηση της σφαίρας: $\Sigma\tau = I \cdot \alpha_{\gamma\omega\nu}$ ή $T_1 \cdot R = \frac{2}{5} m R^2 a_{\gamma\omega\nu}$ ή

$$T_1 = \frac{2}{5} m R a_{\gamma\omega\nu} \quad (4)$$

Από (3) και (4) παίρνουμε: $\alpha_{cm} = \frac{2}{5} R a_{\gamma\omega\nu}$ ή $\alpha_{\gamma\omega\nu} \cdot R = 2{,}5\, \alpha_{cm}$ (5) και η σχέση (1) δίνει $\alpha = 3{,}5\, \alpha_{cm}$ οπότε προσθέτοντας τις (2) και (3) κατά μέλη παίρνουμε:

$$F = M \cdot 3{,}5 \cdot \alpha_{cm} + m \cdot \alpha_{cm} \text{ ή}$$

$$a_{cm} = \frac{F}{3{,}5M + m} = \frac{9N}{4{,}5kg} = 2m/s^2$$

και $\alpha = 3{,}5\, \alpha_{cm} = 7 m/s^2$.

v) Από την εξίσωση (5) παίρνουμε:

$$\alpha_{\gamma\omega\nu} = \frac{2{,}5 a_{cm}}{R} = 50 rad/s^2$$

Αλλά αφού η σφαίρα κυλίεται, το μήκος του τόξου που έρχεται σε επαφή με τη σανίδα, μέχρι τη στιγμή που θα φτάσει στο άκρο Α, θα είναι ίσο με d.

Όταν φτάσει λοιπόν στο άκρο Α θα έχει περιστραφεί κατά γωνία $\theta = \frac{s}{R} = \frac{d}{R}$ ή

$\frac{1}{2}\alpha_{\gamma\omega\nu}\cdot t^2 = d/R$ ή $t = \sqrt{\dfrac{2d}{a_{\gamma\omega\nu}\cdot R}} = \sqrt{\dfrac{2\cdot 2{,}5m}{50\cdot 0{,}1m/s^2}} = 1s$

Υλικό Φυσικής - Χημείας.
Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης