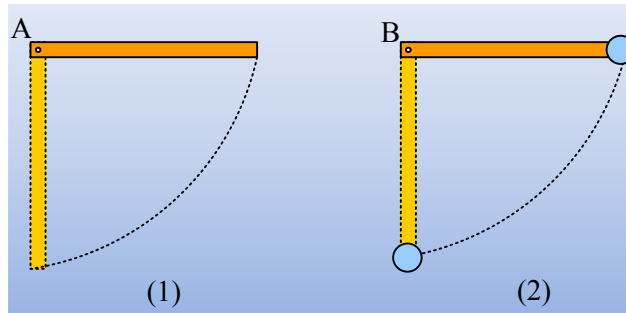


Πιο γρήγορα, πιο σύντομα...



Δυο όμοιες ομογενείς ράβδοι μήκους ℓ και μάζας m , μπορούν να στρέφονται σε κατακόρυφο επίπεδο, γύρω από οριζόντιο άξονα που περνά από το ένα τους άκρο. Στο άλλο άκρο της δεύτερης ράβδου, έχει προσδεθεί ένα μικρό σώμα, αμελητέων διαστάσεων, της ίδιας μάζας m , οπότε έτσι έχουμε δυο στερεά (1) και (2). Τα δυο στερεά ηρεμούν σε κατακόρυφη θέση, όπως στο σχήμα. Εκτρέπουμε τα στερεά φέρνοντάς τα σε οριζόντια θέση και σε μια στιγμή τα αφήνουμε ταυτόχρονα να κινηθούν.

i) Μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση θα αποκτήσει αμέσως μετά, το στερεό:

- α) (1) β) (2) γ) θα αποκτήσουν ίσες γωνιακές επιταχύνσεις.

ii) Πρώτο θα φτάσει στην αρχική κατακόρυφη θέση ισορροπίας το στερεό:

- α) (1) β) (2) γ) θα φτάσουν ταυτόχρονα.

iii) Μεγαλύτερη κινητική ενέργεια θα αποκτήσει το στερεό:

- α) (1) β) (2) γ) θα αποκτήσουν ίσες κινητικές ενέργειες.

iv) Μεγαλύτερη γωνιακή ταχύτητα θα αποκτήσει το στερεό:

- α) (1) β) (2) γ) θα αποκτήσουν ίσες μέγιστες γωνιακές ταχύτητες.

Δίνεται η ροπή αδράνειας μιας ομογενούς ράβδου ως προς κάθετο άξονα που περνά από το μέσον της

$$I_{cm} = \frac{1}{12} m\ell^2.$$

Απάντηση:

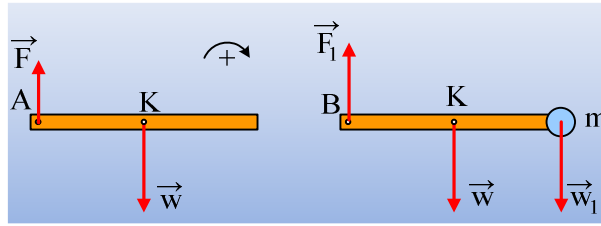
Η ροπή αδράνειας της ράβδου (1) ως προς τον άξονα περιστροφής της, προκύπτει από το θεώρημα Steiner:

$$I_1 = I_{cm} + md^2 = \frac{1}{12} m\ell^2 + m \frac{\ell^2}{4} = \frac{1}{3} m\ell^2,$$

ενώ η αντίστοιχη ροπή αδράνειας του στερεού (2) είναι:

$$I_2 = I_{cm} + md^2 + m\ell^2 = \frac{1}{12} m\ell^2 + m \frac{\ell^2}{4} + m\ell^2 = \frac{4}{3} m\ell^2$$

i) Στο παρακάτω σχήμα έχουν σχεδιαστεί οι δυνάμεις που ασκούνται στα στερεά, μόλις αφεθούν ελεύθερα να κινηθούν.



Με εφαρμογή του 2^{ου} νόμου του Νεύτωνα, παίρνουμε:

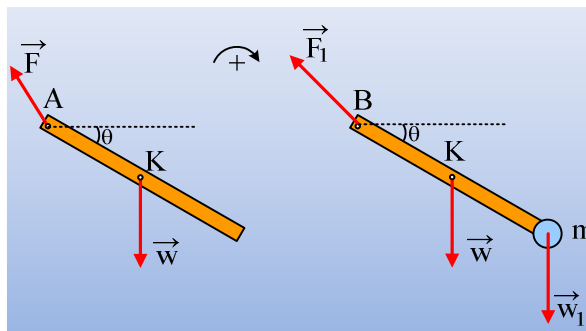
$$\Sigma\tau_1 = I_1 \cdot a_{1\gamma\omega\nu} \rightarrow$$

$$mg \cdot \frac{\ell}{2} = \frac{1}{3} m \ell^2 \cdot a_{1\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{1\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell} = 1,5 \frac{g}{\ell}$$

$$\Sigma\tau_2 = I_2 \cdot a_{2\gamma\omega\nu} \rightarrow mg \cdot \frac{\ell}{2} + mg\ell = \frac{4}{3} m \ell^2 \cdot a_{2\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{2\gamma\omega\nu} = \frac{9g}{8\ell} = 1,125 \frac{g}{\ell}$$

Από τις παραπάνω τιμές προκύπτει ότι το στερεό (1) αποκτά μεγαλύτερη αρχική γωνιακή επιτάχυνση.

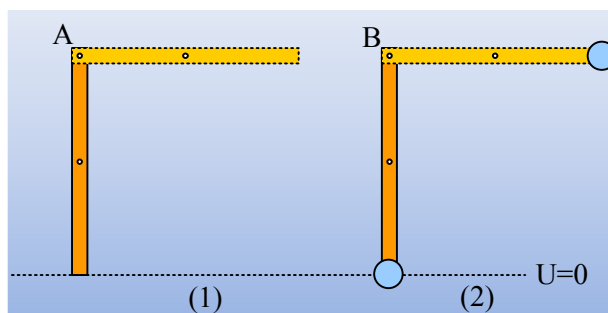
- ii) Πρώτη θα φτάσει σε κατακόρυφη θέση η ράβδος (1) η οποία θα κινηθεί σε όλη τη διαδρομή με μεγαλύτερη γωνιακή επιτάχυνση. Πράγματι αν πάρουμε τα δυο στερεά σε μια τυχαία θέση, όπου οι ράβδοι σχηματίζουν γωνία θ με την οριζόντια θέση, θα έχουμε:



$$\Sigma\tau_1 = I_1 \cdot a_{1\gamma\omega\nu} \rightarrow mg \cdot \frac{\ell}{2} \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{1}{3} m \ell^2 \cdot a_{1\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{1\gamma\omega\nu} = \frac{3g}{2\ell} \sigma\upsilon\nu\theta = 1,5 \frac{g}{\ell} \sigma\upsilon\nu\theta$$

$$\Sigma\tau_2 = I_2 \cdot a_{2\gamma\omega\nu} \rightarrow mg \cdot \frac{\ell}{2} \sigma\upsilon\nu\theta + mg\ell \sigma\upsilon\nu\theta = \frac{4}{3} m \ell^2 \cdot a_{2\gamma\omega\nu} \rightarrow a_{2\gamma\omega\nu} = \frac{9g}{8\ell} \sigma\upsilon\nu\theta = 1,125 \frac{g}{\ell} \sigma\upsilon\nu\theta$$

- iii) Κατά την κίνηση των δυο στερεών η μηχανική ενέργεια παραμένει σταθερή, αφού οι μόνες δυνάμεις που παράγουν έργο είναι τα βάρη (συντηρητικές δυνάμεις). Θεωρώντας επίπεδο μηδενικής δυναμικής ενέργειας το επίπεδο που περνά από το κατώτερο σημείο των ράβδων παίρνουμε:



Για την (1) ράβδο: $K_{1αρχ} + U_{1αρχ} = K_{1τελ} + U_{1τελ} \rightarrow 0 + mg\ell = K_{1τελ} + mg\frac{\ell}{2} \rightarrow$

$$K_{1τελ} = \frac{1}{2}mg\ell$$

Για το (2) στερεό: $K_{2αρχ} + U_{2αρχ} = K_{2τελ} + U_{2τελ} \rightarrow 0 + 2mg\ell = mg\frac{\ell}{2} + K_{2τελ} \rightarrow$

$$K_{2τελ} = \frac{3}{2}mg\ell$$

Συνεπώς μεγαλύτερη κινητική ενέργεια αποκτά το στερεό (2). Σωστή η β) πρόταση.

iv) Για τις κινητικές ενέργειες, που υπολογίσαμε προηγούμενα, έχουμε:

$$\frac{1}{2} \frac{1}{3} m\ell^2 \omega_1^2 = mg\frac{\ell}{2} \rightarrow \omega_1 = \sqrt{\frac{3g}{\ell}} \text{ και}$$

$$\frac{1}{2} \frac{4}{3} m\ell^2 \omega_2^2 = \frac{3}{2} mg\ell \rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{9g}{4\ell}}$$

Συνεπώς προφανώς $\omega_1 > \omega_2$, σωστή η α) πρόταση, αφού $\sqrt{3} > 1,5$.

Υλικό Φυσικής - Χημείας.

Επειδή το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους....

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης