

1.1. Μηχανικές Ταλαντώσεις.

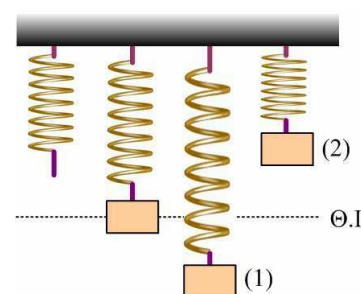
1) Εξισώσεις ΑΑΤ

Ένα υλικό σημείο κάνει α.α.τ. με πλάτος $0,1\text{m}$ και στην αρχή των χρόνων, βρίσκεται σε σημείο M με απομάκρυνση 5cm , απομακρυνόμενο από τη θέση ισορροπίας. Μετά από 1s περνά ξανά από το M για πρώτη φορά με αντίθετη ταχύτητα.

- i) Βρείτε τις εξισώσεις της απομάκρυνσης και της ταχύτητας σε συνάρτηση με το χρόνο.
- ii) Ποια η εξίσωση της φάσης της απομάκρυνσης σε συνάρτηση με το χρόνο; Να κάνετε την γραφική της παράσταση.

2) Δυνάμεις σε σώμα που εκτελεί ΑΑΤ.

Ένα σώμα βάρους 10N ισορροπεί στο κάτω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς k , επιμηκύνοντάς το κατά 10cm . Εκτρέπουμε το σώμα κατακόρυφα κατά $A=10\text{cm}$ και αφήνοντάς το εκτελεί α.α.τ. Στο σχήμα φαίνεται η θέση ισορροπίας ($\Theta.Ι.$) η κάτω ακραία θέση (1) και μια τυχαία θέση (2).



- i) Σχεδιάστε τις δυνάμεις που ασκούνται στο σώμα και στις τρεις παραπάνω θέσεις.
 - ii) Πόσο είναι το μέτρο της δύναμης του ελατηρίου στη θέση ισορροπίας και πόσο στη θέση (1);
 - iii) Η συνισταμένη δύναμη που ασκείται στο σώμα:
 - α) στη θέση (1) κατευθύνεται προς τα πάνω β) στη θέση (2) κατευθύνεται προς τα κάτω
 - γ) στη θέση ισορροπίας κατευθύνεται προς τα κάτω
- Χαρακτηρίστε σαν σωστές ή λαθεμένες τις παραπάνω προτάσεις.
- iv) Υπάρχει κάποια θέση που το ελατήριο να μην ασκεί δύναμη στο σώμα; Αν ναι, πόση θα είναι η επιτάχυνση του σώματος στη θέση αυτή;
 - v) Σε ποια θέση το ελατήριο έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια;

3) ΑΑΤ και πλάτος ταλάντωσης

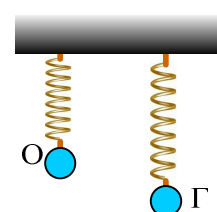
Ένα ιδανικό ελατήριο σταθεράς 400N/m ισορροπεί σε κατακόρυφη θέση, με το πάνω άκρο του συνδεδεμένο σε ακλόνητο σημείο και το κάτω άκρο ελεύθερο. Στο ελεύθερο άκρο κρεμάμε σώμα Σ μάζας 4kg και το αφήνουμε να κινηθεί από τη θέση φυσικού μήκους του ελατηρίου.

Αποδείξτε ότι το Σ θα εκτελέσει α.α.τ. και βρείτε το πλάτος της ταλάντωσης.

Τριβές δεν υπάρχουν. $g=10\text{m/s}^2$.

4) Ενέργεια στην ΑΑΤ

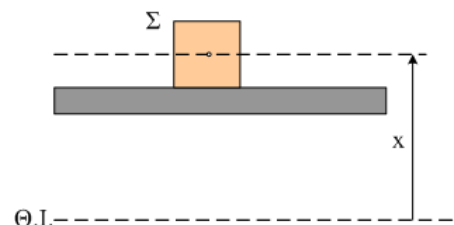
Ένα σώμα μάζας $m=2\text{kg}$ ηρεμεί σε σημείο O , στο άκρο κατακόρυφου ελατηρίου, σταθεράς $k=100\text{N/m}$, το άλλο άκρο του οποίου κρέμεται από σταθερό σημείο. Προσφέροντάς του ενέργεια $W=4,5\text{J}$ το απομακρύνουμε κατά A , φέρνοντάς το στη θέση Γ , οπότε αφήνοντάς το εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση πλάτους A .



- i) Πόση είναι η ενέργεια ταλάντωσης;
- ii) Βρείτε το πλάτος ταλάντωσης A .
- iii) Στη θέση Γ τι ενέργεια ταλάντωσης έχουμε;
- iv) Πόση είναι η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου στη θέση Γ ;
- v) Πόση είναι η ενέργεια της ταλάντωσης στην θέση O και με ποια μορφή εμφανίζεται;
- vi) Έχει δυναμική ενέργεια το ελατήριο στην θέση O , και αν ναι πόση είναι αυτή; $g=10\text{m/s}^2$.

5) Δύναμη στην Ταλάντωση.

Ένα σώμα Σ μάζας 2kg στηρίζεται σε μια σανίδα και εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση σε κατακόρυφη διεύθυνση με εξίσωση $x=0,4\eta\mu 5t$ (θετική φορά προς τα πάνω).



- i) Πόση δύναμη δέχεται από την σανίδα $0,3\text{m}$ πάνω από τη θέση ισοροπίας;
- ii) Να γίνει το διάγραμμα της παραπάνω δύναμης σε συνάρτηση με το χρόνο.

6) Ένα ιστιοφόρο ταλαντώνεται

Ένα ιστιοφόρο πλοίο, είναι αγκυροβολημένο στ' ανοιχτά, έξω από το λιμάνι.

Η ορατότητα ανάμεσα στο πλοίο και στο λιμάνι, εμποδίζεται από τον τοίχο ενός λιμενοβραχίονα.

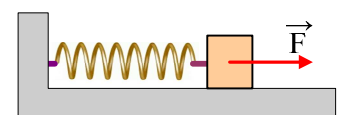
Μια μέρα με θαλασσοταραχή, ένας παρατηρητής που στέκεται στην προβλήτα, διακρίνει μόνο το πάνω τμήμα του πιο ψηλού ιστού του πλοίου, να κινείται κατακόρυφα. Με τον χρονομετρητή του ρολογιού του, μετρά τον χρόνο που βλέπει την κορυφή του ιστού και τον βρίσκει 10 s , και τον χρόνο που δεν τη βλέπει 20 s . Εκτιμά δε ότι, το μέγιστο μήκος του ιστού πάνω από το λιμενοβραχίονα $0,5\text{ m}$.

Να θεωρήσετε την κίνηση του ιστού ως απλή αρμονική ταλάντωση, και να βρείτε:

- i) Την συχνότητα.
- ii) Το πλάτος.
- iii) Τις εξισώσεις απομάκρυνσης – χρόνου και ταχύτητας χρόνου, με χρονική στιγμή $t = 0$, την στιγμή που εμφανίζεται για πρώτη φορά η κορυφή του ιστού πάνω από τον λιμενοβραχίονα και θετική τη φορά της ταχύτητας τότε.
- iv) Τον χρόνο από την στιγμή που εμφανίζεται η κορυφή του ιστού πάνω από τον λιμενοβραχίονα, μέχρι να σταματήσει να κινείται για πρώτη φορά, στο κατώτερο σημείο της τροχιάς της.

7) Μια οριζόντια ταλάντωση.

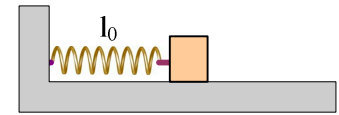
Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς $k=200\text{N/m}$. Σε μια στιγμή που θεωρούμε $t=0$, ασκούμε στο σώμα μια σταθερή οριζόντια δύναμη, όπως στο σχήμα, μέτρου $F=40\text{N}$.



- i) Να αποδείξετε ότι το σώμα θα εκτελέσει α.α.τ. και να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης.
- ii) Θεωρώντας την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική, να βρείτε την εξίσωση της ταχύτητας του σώματος σε συνάρτηση με το χρόνο και να κάνετε τη γραφική της παράσταση.

8) Και μία και δύο ΑΑΤ...

Ένα σώμα μάζας 2kg ηρεμεί σε λείο οριζόντιο επίπεδο, δεμένο στο άκρο οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς 200N/m, το άλλο άκρο του οποίου είναι σταθερά δεμένο σε έναν κατακόρυφο τοίχο.



Για $t=0$ ασκούμε πάνω του μια σταθερή οριζόντια δύναμη μέτρου $F=80\text{N}$, μέχρι τη θέση που το σώμα αποκτά μέγιστη ταχύτητα, όπου η δύναμη F καταργείται.

- i) Σε ποια θέση το σώμα αποκτά μέγιστη ταχύτητα;
- ii) Πόση είναι η ταχύτητα αυτή;
- iii) Για πόσο χρόνο ασκείται στο σώμα η δύναμη F ;
- iv) Ποιο είναι το πλάτος ταλάντωσης που θα εκτελέσει τελικά το σώμα;

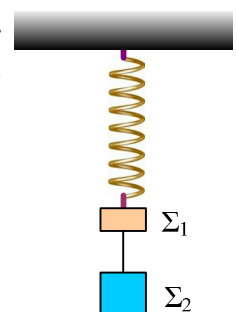
9) Άσκηση 1^η στα θεμελιώδη της ΑΑΤ.

Σώμα μάζας $m=0,1\text{kg}$ εκτελεί α.α.τ και η εξίσωση της ταχύτητάς του είναι $v=2\text{ συν}\left(10t + \frac{\pi}{6}\right)$ (S.I).

- i) Να υπολογιστεί ο ρυθμός μεταβολής της φάσης της ταλάντωσης.
- ii) Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης $x=x(t)$ και να γίνει η γραφική παράστασή της.
- iii) Για τις χρονικές στιγμές που αλλάζει φορά η ταχύτητα μέχρι τη χρονική στιγμή $t=\frac{3\pi}{10}\text{s}$, να υπολογίσετε το ρυθμό μεταβολής της ορμής του σώματος.
- iv) Να υπολογιστεί η επιτάχυνση του σώματος στις θέσεις όπου η ταχύτητα του σώματος έχει μέτρο $v=\frac{v_{\max}}{2}$.

10) Ταλάντωση και τάση νήματος.

Στο κάτω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $k=200\text{N/m}$ ηρεμούν δύο σώματα Σ_1 και Σ_2 με μάζες 1kg και 4kg αντίστοιχα, όπως στο παρακάτω σχήμα. Το νήμα που συνδέει τα δυο σώματα έχει μήκος 20cm.



Τραβάμε το σώμα Σ_2 κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $d=20\text{cm}$ και για $t=0$ το αφήνουμε, οπότε το σύστημα εκτελεί ΓΑΤ.

- i) Να βρεθεί το πλάτος και η περίοδος ταλάντωσης.
- ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της τάσης του νήματος που ασκείται στο σώμα Σ_2 , σε συνάρτηση με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας του συστήματος.
- iii) Τη χρονική στιγμή $t_1=1,5\text{s}$ το νήμα που συνδέει τα δυο σώματα κόβεται. Να βρεθεί η απόσταση των δύο σωμάτων τη χρονική στιγμή $t_2=2\text{s}$.

Δίνονται $g=10\text{m/s}^2$ και $\pi^2\approx 10$.

11) Μια πλαστική κρούση και μια ΑΑΤ

Σώμα Σ μάζας $M=1,8\text{kg}$ έχει συνδεθεί στην ελεύθερη άκρη οριζόντιου ελατηρίου σταθεράς 200N/m. Ένα βλήμα μάζας $m_1=0,2\text{kg}$ που κινείται κατά τη διεύθυνση του ελατηρίου με ταχύτητα $v_0=8\text{m/s}$ συγκρούεται

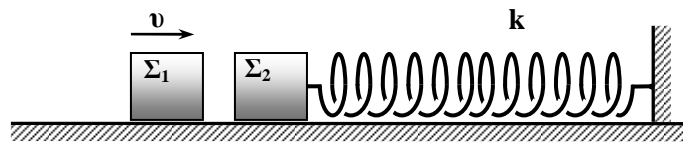
με το σώμα και σφηνώνεται σε αυτό. Ποιο το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το συσσωμάτωμα και πόσο χρόνο διαρκεί η συσπείρωση του ελατηρίου; Τριβές δεν υπάρχουν.

12) Αλλαγή θέσης ισορροπίας

Ένα σώμα Σ μάζας $M=9\text{kg}$ ηρεμεί στο πάνω άκρο κατακόρυφου ελατηρίου σταθεράς $K=100\text{N/m}$. Από ύψος 5m πάνω από το σώμα Σ , ρίχνουμε κατακόρυφα με αρχική ταχύτητα $v_0=10\text{m/s}$ ένα σώμα Σ_1 μάζας 1kg που σφηνώνεται στο σώμα Σ . Να βρείτε:

- την κοινή ταχύτητα του συσσωματώματος αμέσως μετά την κρούση
- το πλάτος της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σύστημα των δύο σωμάτων. $g=10\text{m/s}^2$.

13) Κρούση και πλάτος ταλάντωσης

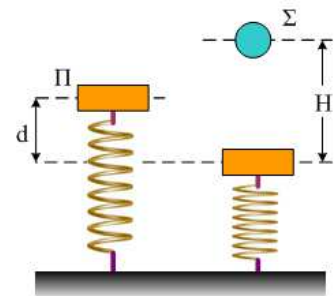


Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 έχουν ίσες μάζες $m_1 = m_2 = m = 9\text{kg}$, το δάπεδο είναι λείο και το Σ_2 είναι στερεωμένο σε ελατήριο σταθεράς $k = 25 \cdot \pi^2\text{N/m}$ και ισορροπεί όπως φαίνεται στο σχήμα. Το Σ_1 κινείται με οριζόντια ταχύτητα $v = 3,14\text{m/sec}$ και συγκρούεται με το Σ_2 . Να βρεθεί η μέγιστη συσπείρωση του ελατηρίου, αν τα δύο σώματα συγκρούονται ξανά μετά από:

- $\Delta t = 0,6\text{sec}$
- $\Delta t = 0,5\text{sec}$

14) Ταλάντωση και κρούση.

Μια πλάκα μάζας $m_1=2\text{kg}$ ηρεμεί στο πάνω άκρο ενός κατακόρυφου ελατηρίου, το άλλο άκρο του οποίου στηρίζεται στο έδαφος. Εκτρέπουμε την πλάκα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά $d=0,2\text{m}$ και σε μια στιγμή την αφήνουμε να κινηθεί, ενώ ταυτόχρονα από ύψος $H=32,5\text{cm}$ (πάνω από την πλάκα) αφήνουμε μια σφαίρα ίσης μάζας να πέσει. Τα δύο σώματα συγκρούονται μετά από χρόνο $t_1 = \pi/20\text{ s}$ και κατά την κρούση ανταλλάσσουν ταχύτητες.



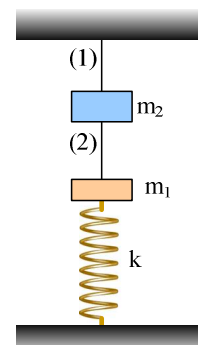
- Σε ποια θέση έγινε η κρούση των δύο σωμάτων;
- Ποιες οι ταχύτητες των δύο σωμάτων ελάχιστα πριν την κρούση;
- Να βρεθεί η ενέργεια ταλάντωσης, πριν και μετά την κρούση.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$ και $\pi^2 \approx 10$.

15) Ταλάντωση και πλαστική κρούση

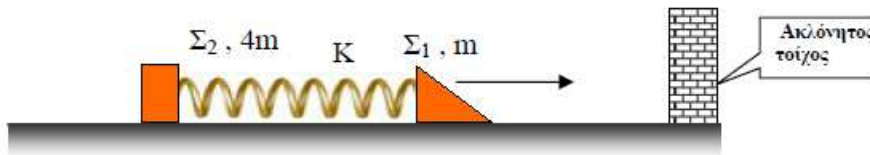
Τα δύο σώματα του παρακάτω σχήματος έχουν μάζες $m_1=1\text{kg}$ και $m_2=1,5\text{kg}$ και το ελατήριο έχει σταθερά $k=40\text{N/m}$.

- Αν η τάση του νήματος (1) είναι 25N , πόση είναι η τάση του νήματος (2);



- ii) Σε μια στιγμή κόβουμε το νήμα (1). Αν τα δύο σώματα συγκρούονται πλαστικά την στιγμή που μηδενίζεται για πρώτη φορά η ταχύτητα του σώματος m_1 , να βρεθεί το μήκος του νήματος (2).
- iii) Πόση είναι η ενέργεια ταλάντωσης του συσσωματώματος μετά την κρούση; Θεωρείται ότι η κίνηση του συσσωματώματος είναι απλή αρμονική ταλάντωση ενώ $g=10\text{m/s}^2$ και $\pi^2 \approx 10$.

16) Ταλάντωση μετά από σύγκρουση



Το σύστημα του σχήματος, κινείται με σταθερή ταχύτητα πάνω σε λείο οριζόντιο επίπεδο. Το ιδανικό ελατήριο είναι στο φυσικό του μήκος και έχει σταθερά $k = 400 \text{ N/m}$. Τα σώματα Σ_1 και Σ_2 αμελητέων διαστάσεων, έχουν μάζες m και $4m$ αντίστοιχα, και είναι δεμένα στα άκρα του ελατηρίου. Το σώμα Σ_1 συναντά κατακόρυφο τοίχο στον οποίο καρφώνεται ακαριαία και μόνιμα. Κατά την διάρκεια του καρφώματος ελαττώνεται η μηχανική ενέργεια του συστήματος κατά 400J ενώ τα σώματα Σ_1 , Σ_2 δεν έρχονται σ' επαφή μεταξύ τους.

Το Σ_2 μετά την κρούση εκτελεί 5 ταλαντώσεις/sec με $D = k$.

I. Για την ταλάντωση του Σ_2 να υπολογίσετε:

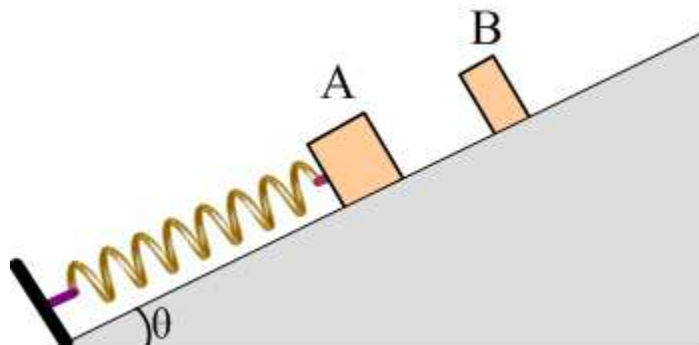
- Την ενέργειά της.
- Το πλάτος της.
- Την εξίσωση απομάκρυνσης - χρόνου με χρονική στιγμή $t = 0$, τη στιγμή που φτάνει το Σ_1 στον τοίχο και η φορά της ταχύτητάς του τότε θετική.

II. Να υπολογίσετε ακόμη:

- Την ταχύτητα του συστήματος πριν την σύγκρουση.
- Την μηχανική ενέργεια του συστήματος πριν την σύγκρουση.

17) Μια ταλάντωση σε πλάγιο επίπεδο και κρούση.

Το σώμα A μάζας $m_1=2\text{kg}$ ηρεμεί σε κεκλιμένο επίπεδο κλίσεως $\theta=30^\circ$, δεμένο στο άκρο ελατηρίου σταθεράς $K=200\text{N/m}$. Το σώμα A δεν εμφανίζει τριβές με το επίπεδο. Μετακινούμε το σώμα συσπειρώνοντας το ελατήριο κατά $d=0,5\text{m}$ και το αφήνουμε να κινηθεί.



Να αποδειχθεί ότι το σώμα A θα εκτελέσει απλή αρμονική ταλάντωση.

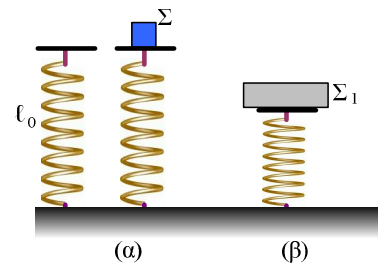
- i) Πόση ενέργεια καταναλώσαμε για την μετακίνηση του σώματος A κατά d.
- ii) Μετά από μετατόπιση του σώματος A κατά $s=0,9\text{m}$, συγκρούεται μετωπικά και ελαστικά με άλλο σώμα B μάζας $m_2=1\text{kg}$, το οποίο ήταν ακίνητο. Μετά την κρούση το σώμα B διανύει απόσταση $0,8\text{m}$ κατά μήκος του επιπέδου.
 - α) Να βρεθεί η τριβή που ασκήθηκε στο σώμα B κατά την κίνησή του.
 - β) Να υπολογισθεί η ενέργεια ταλάντωσης του σώματος A μετά την κρούση.
 - γ) Να εξετασθεί αν τα δύο σώματα θα ξανασυγκρουσθούν.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

18) Δυο κατακόρυφες ταλαντώσεις.

Ένα ιδανικό κατακόρυφο ελατήριο, έχει σταθερά $k=400\text{N/m}$ και στηρίζεται με το ένα του άκρο στο έδαφος, έχοντας το φυσικό του μήκος

- i) Σε μια στιγμή αφήνουμε πάνω του ένα σώμα Σ , μάζας $m=1\text{kg}$ (σχήμα α). Να αποδείξετε ότι θα εκτελέσει α.α.τ. και να βρείτε το πλάτος και την περίοδο της ταλάντωσης του.
- ii) Να κάνετε τη γραφική παράσταση της δύναμης που δέχεται από το ελατήριο σε συνάρτηση με το χρόνο, αφού θεωρήσετε την προς τα πάνω κατεύθυνση θετική.
- iii) Πάνω στο ίδιο ελατήριο ηρεμεί ένα σώμα Σ_1 μάζας $m_1=3\text{kg}$ (σχήμα β). Τοποθετούμε τώρα για $t=0$ το σώμα Σ , πάνω στο Σ_1 και τα αφήνουμε να ταλαντωθούν. Πόσο είναι τώρα το πλάτος και η περίοδος ταλάντωσης; Να κάνετε τη γραφική παράσταση της δύναμης που δέχεται το σώμα Σ , από το Σ_1 σε συνάρτηση:
 - α) με την απομάκρυνση από τη θέση ισορροπίας και
 - β) με το χρόνο.



Δεχτείτε ξανά την προς τα πάνω κατεύθυνση ως θετική.

Δίνεται $g=10\text{m/s}^2$.

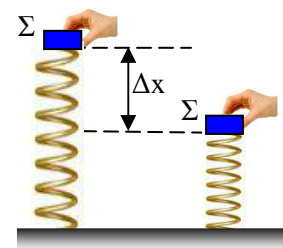
19) Ταλάντωση μετά από εκτίναξη

Ένα σώμα Σ μάζας $m = 1\text{kg}$, είναι δεμένο στο πάνω άκρο ιδανικού ελατηρίου. Αρχικά, κρατάμε το σώμα έτσι ώστε το ελατήριο να είναι κατακόρυφο στο φυσικό του μήκος, και με το ελεύθερο κάτω άκρο του, μόλις να αγγίζει στο οριζόντιο επίπεδο όπως φαίνεται στο σχήμα.

Αν μετατοπίσουμε το σώμα προς τα κάτω κατά $\Delta x = 30\text{cm}$ και κατόπιν το αφήσουμε ελεύθερο, παρατηρούμε ότι, εκτινάσσεται προς τα πάνω και φτάνει σε ύψος $h = 1,8\text{m}$ από το σημείο που το αφήσαμε.

Στερεώνουμε το κάτω άκρο του ελατηρίου στο οριζόντιο επίπεδο, μετατοπίζουμε το σώμα κατακόρυφα προς τα κάτω κατά την ίδια μετατόπιση Δx , και παρατηρούμε ότι εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

- i) Να υπολογίσετε τα παρακάτω μεγέθη της ταλάντωσης αυτής:
 - α) Την περίοδό της
 - β) Το πλάτος της.



ii) Το μέγιστο ύψος στο οποίο θα φτάσει το σώμα Σ πάνω από τη θέση που το αφήσαμε, όταν το κάτω άκρο του ελατηρίου είναι στερεωμένο.

iii) Την ενέργεια που απαιτήθηκε για τη μετατόπιση του σώματος Σ από το σημείο του φυσικού μήκους του ελατηρίου προς τα κάτω κατά $\Delta x = 30\text{cm}$.

Δίνεται $g = 10 \text{ m/s}^2$, ότι δεν υπάρχουν τριβές, και ότι η σταθερά επαναφοράς της ταλάντωσης που θα εκτελέσει το σώμα Σ είναι $D = k$ όπου k η σταθερά του ελατηρίου.

20) Μια ταλάντωση με ... το χέρι.

Κρατάμε στο χέρι μας την μια άκρη ελατηρίου αμελητέας μάζας ενώ στην άλλη άκρη έχουμε στερεώσει σώμα μάζας 2 kg . Όλο το σύστημα ανεβαίνει με σταθερή

επιτάχυνση $5 \frac{m}{s^2}$. Κάποια στιγμή που η ταχύτητα είναι $v = \sqrt{\frac{3}{2}} \frac{m}{s}$, το χέρι

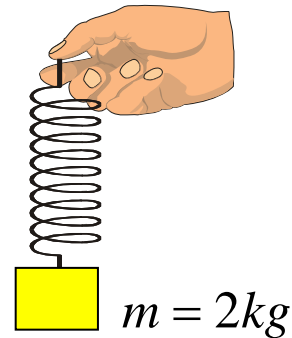
σταματά ακαριαία και το σώμα εκτελεί απλή αρμονική ταλάντωση.

i) Βρείτε την αρχική παραμόρφωση του ελατηρίου.

ii) Προσδιορίσατε την θέση ισορροπίας και το πλάτος της ταλάντωσης.

iii) Σε πόσο χρόνο από τη στιγμή που ακινητοποιήθηκε το χέρι το σώμα θα ακινητοποιηθεί στιγμιαία ;

iv) Με ποιο ρυθμό μεταβάλλεται η δυναμική ενέργεια του ελατηρίου τη στιγμή που ακινητοποιήθηκε το χέρι ;



Δίνονται: $\left(k = 100 \frac{N}{m}, g = 10 \frac{m}{s^2} \right)$