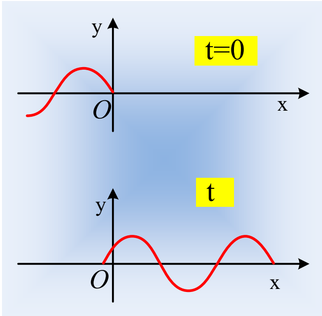
Μια αρχή στα κύματα



Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από τα αριστερά προς τα δεξιά διαδίδεται χωρίς απώλειες ένα αρμονικό κύμα, το οποίο τη στιγμή $t_0=0$ φτάνει σε ένα σημείο Ο, το οποίο λαμβάνουμε ως αρχή ενός προσανατολισμένου άξονα x, με την προς τα δεξιά κατεύθυνση ως θετική. Το σημείο Ο ξεκινά την ταλάντωσή του προς τα πάνω (θετική φορά του άξονα y) και εκτελεί 10 πλήρεις ταλαντώσεις σε χρονικό διάστημα 12s, διανύοντας στο μεταξύ διάστημα 8m. Το κύμα φτάνει σε ένα σημείο Β, στη θέση $x_B=x_1=2{,}2m$ τη χρονική στιγμή $t_1=1{,}1s$.

i) Να γράψετε τις εξισώσεις για την απομάκρυνση σε συνάρτηση με το χρόνο, για τις ταλαντώσεις που θα εκτελέσουν τα σημεία Ο και Β.

ii) Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.

iii) Να σχεδιάστε το στιγμιότυπο του κύματος τη στιγμή t_1 που το κύμα φτάνει στο σημείο Β και για την περιοχή του θετικού ημιάξονα. Ποια η απομάκρυνση του σημείου Ο την παραπάνω χρονική στιγμή;

iv) Ποια χρονική στιγμή t_2 το σημείο Β, θα απέχει κατά 0,1m από τη θέση ισορροπίας του, για πρώτη φορά; Πόση είναι η επιτάχυνσή του τη στιγμή αυτή; Να σχεδιάστε την μορφή του μέσου (του θετικού ημιάξονα) την στιγμή t_2 και να σημειώστε πάνω στο διάγραμμα την ταχύτητα και την επιτάχυνση του σημείου Β.

Απάντηση:

Αφού το σημείο Ο εκτελεί 10 ταλαντώσεις σε χρόνο Δt=12s η συχνότητα ταλάντωσης του Ο, συνεπώς και η συχνότητα του κύματος είναι:

$$f=\frac{N}{\Delta t}=\frac{10}{12}Hz=\frac{5}{6}Hz$$

Συνεπώς η περίοδος ταλάντωσης είναι ίση $T=1/f=1{,}2s$. Εξάλλου από τη μια ακραία θέση της ταλάντωσης στην άλλη, το σημείο Ο διανύει απόσταση 2 Α, οπότε σε κάθε περίοδο διανύει διάστημα 4 Α. Αλλά τότε στις 10 ταλαντώσεις θα διανύει διάστημα:

$$s=N\cdot 4A\rightarrow A=\frac{s}{4N}=\frac{8m}{40}=0{,}2m$$

i) Το σημείο Ο αρχίζει την ταλάντωσή του από την θέση ισορροπίας του για t=0, οπότε η απομάκρυνσή του δεν εμφανίζει αρχική φάση και η εξίσωσή της έχει τη μορφή:

$$y_O=A\eta\mu(\omega t)=A\eta\mu(2\pi f t)=0{,}2\cdot\eta\mu\left(2\pi\frac{5}{6}t\right)=0{,}2\cdot\eta\mu\left(\frac{5\pi}{3}t\right)\ \text{(S.I.) με } t\geq 0.\ (1)$$

Αλλά και το σημείο Β θα εκτελέσει ίδιας μορφής ταλάντωση, απλά θα καθυστερήσει την έναρξη της ταλάντωσής του κατά 1,1s, με αποτέλεσμα να έχει εξίσωση απομάκρυνσης:

$$y_B = 0{,}2\cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{3}(t-t_1)\right) = 0{,}2\cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{3}t-\frac{11\pi}{6}\right) \text{ (S.I.) με } t \geq 1{,}1\text{s.} \quad (2)$$

ii) Η ταχύτητα διάδοσης του κύματος είναι ίση:

$$\upsilon = \frac{x_1}{t_1} = \frac{2{,}2m}{1{,}1s} = 2m/s$$

Ενώ για το μήκος κύματος έχουμε:

$$\upsilon = \lambda f \to \lambda = \frac{\upsilon}{f} = \frac{2}{5/6}m = 2{,}4m$$

Αλλά τότε η εξίσωση κύματος παίρνει τη μορφή:

$$y = A\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{T}-\frac{x}{\lambda}\right) = 0{,}2\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{5}{6}t-\frac{5}{12}x\right) \text{ (S.I.) με } t \geq 0 \text{ και } x \leq 2t \quad (3)$$

Η παραπάνω εξίσωση θα μπορούσε (αν θέλαμε… να εμφανίζονται περίοδος και μήκος κύματος) να γραφτεί με τη μορφή:

$$y = 0{,}2\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{t}{1{,}2}-\frac{x}{2{,}4}\right) \text{ (S,I.)}$$

iii) Με αντικατάσταση στην εξίσωση κύματος t_1=1,1s παίρνουμε:

$$y = 0{,}2\cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{5}{6}t-\frac{5}{12}x\right) = 0{,}2\cdot \eta\mu\left(2\pi\frac{5}{6}1{,}1-2\pi\frac{5}{12}x\right) = 0{,}2\cdot \eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}x\right) \quad (4)$$

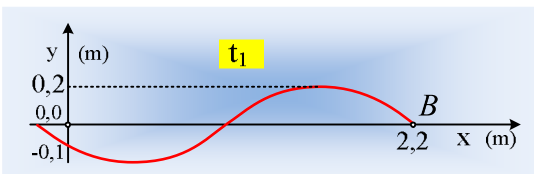
Προφανώς το κύμα έχει φτάσει μέχρι τη θέση x_B=2,2m, ενώ με αντικατάσταση στην (4) x=0, παίρνουμε για την απομάκρυνση του σημείου Ο:

$$y_O = 0{,}2\cdot \eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}-\frac{5\pi}{6}0\right) = 0{,}2\cdot \eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -0{,}1m$$

Θα μπορούσαμε βέβαια να χρησιμοποιούσαμε την σχέση (1), από όπου θα βρίσκαμε ξανά:

$$y_O = 0{,}2\cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{3}t\right) = 0{,}2\cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{3}1{,}1\right) = 0{,}2\cdot \eta\mu\left(\frac{11\pi}{6}\right) = -0{,}1m$$

Η γραφική παράσταση της (4), λαμβάνοντας και το αποτέλεσμα για την απομάκρυνση του Ο, είναι όπως στο παρακάτω σχήμα:



iv) Αντικαθιστώντας στην (2) y=01m παίρνουμε:

$$0,1 = 0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{3}t - \frac{11\pi}{6}\right) \to \eta\mu\left(\frac{5\pi}{3}t - \frac{11\pi}{6}\right) = \frac{1}{2}$$

Οι γωνίες (στην πρώτη περίοδο) με ημφ= ½ είναι η π/6 και 5π/6, αλλά εμείς ενδιαφερόμαστε για την πρώτη φορά, οπότε:

$$\frac{5\pi}{3}t_2 - \frac{11\pi}{6} = \frac{\pi}{6} \to \frac{5\pi}{3}t_2 = 2\pi \text{ ή}$$

$$t_2 = 1,2s$$

Ενώ η επιτάχυνση του σημείου Β δίνεται από την εξίσωση:

$$\alpha = -\omega^2 y = -\left(\frac{5\pi}{3}\right)^2 \cdot 0,1m/s^2 \approx -2,74m/s^2.$$

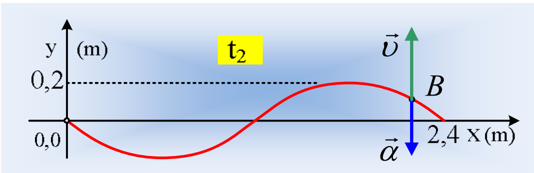
Η αρνητική τιμή της σημαίνει ότι η επιτάχυνση έχει φορά προς τα κάτω (προς τη θέση ισορροπίας).

Αντικαθιστώντας εξάλλου στην εξίσωση του κύματος (3) τη στιγμή t_2=1,2s έχουμε:

$$y = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{5}{6}t - \frac{5}{12}x\right) = 0,2 \cdot \eta\mu 2\pi\left(\frac{5}{6}1,2 - \frac{5}{12}x\right) = 0,2 \cdot \eta\mu\left(2\pi - \frac{10\pi}{12}x\right) \text{ ή}$$

$$y = -0,2 \cdot \eta\mu\left(\frac{5\pi}{6}x\right) \text{ με } x \le 2t \text{ ή } x \le 2,4m$$

Με την παρακάτω γραφική παράσταση. Στο σχήμα έχουν επίσης σχεδιαστεί τα διανύσματα της ταχύτητας και της επιτάχυνσης του σημείου Β.



Σχόλιο:

Αξίζει να παρατηρήσουμε ότι για τη στιγμή που το σημείο Β βρίσκεται σε απομάκρυνση y=0,1m, απομακρυνόμενο από τη θέση ισορροπίας του, βρήκαμε t_2=1,2s=Τ. Δηλαδή το σημείο Ο στην αρχή του άξονα, έχει εκτελέσει μια πλήρη ταλάντωση, αλλά τότε το κύμα έχει διαδοθεί σε απόσταση ίση με ένα μήκος κύματος (x=2,4m=λ).

Υλικό Φυσικής-Χημείας

Γιατί το να μοιράζεσαι πράγματα, είναι καλό για όλους…

Επιμέλεια:

Διονύσης Μάργαρης