

2.2. Συμβολή και στάσιμα κύματα. Ομάδα Γ.

2.2.21. Κύματα σε γραμμικό ελαστικό μέσο.

Δύο σύγχρονες πηγές O_1 και O_2 παράγουν αρμονικά κύματα που διαδίδονται με ταχύτητα $v=2\text{m/s}$ κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου με άκρα τα σημεία O_1 και O_2 όπου $(O_1O_2)=4\text{m}$.



Η εξίσωση ταλάντωσης των πηγών είναι:

$$y = 5 \eta\mu 2\pi t \quad (y! \text{ cm, } t! \text{ s})$$

- i) Να βρεθούν οι εξισώσεις των δύο κυμάτων που παράγονται θεωρώντας $x=0$ τη θέση της πηγής O_1 .
- ii) Να σχεδιάσετε στιγμιότυπα που να δείχνει την απομάκρυνση των διαφόρων σημείων του μέσου, σε συνάρτηση με την θέση τους x , τις χρονικές στιγμές:

$$\alpha) t_1 = 0,75\text{s.} \quad \beta) t_2 = 1,25\text{s} \text{ και}$$

2.2.22. Επαναληπτικό πρόβλημα στη συμβολή κυμάτων.

Δύο σύγχρονες πηγές Π_1 και Π_2 που απέχουν απόσταση $d=8\text{m}$, παράγουν στην επιφάνεια ενός υγρού αρμονικά κύματα που έχουν ταχύτητα διάδοσης $v=20\text{m/s}$. Η εξίσωση της απομάκρυνσης των πηγών σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται από τη σχέση $y=0,4\eta\mu 20\pi t$ (S.I.).

1. Σε ένα σημείο Σ της επιφάνειας του υγρού που απέχει απόσταση $r_1=4\text{m}$ από την πηγή Π_1 και απόσταση r_2 από την πηγή Π_2 με $r_2 > r_1$, τα δύο κύματα φτάνουν με χρονική καθυστέρηση $\Delta t = 0,2\text{s}$.
 - α) Να διερευνήσετε αν στο σημείο Σ έχουμε ενισχυτική ή αποσβεστική συμβολή.
 - β) Να βρεθεί η απόσταση r_2 .
 - γ) Να βρεθεί η υπερβολή ενίσχυσης ή απόσβεσης στην οποία βρίσκεται το σημείο Σ .
 - δ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της απομάκρυνσης του σημείου Σ σε συνάρτηση με το χρόνο για $t \geq 0$.
 - ε) Να υπολογίσετε την ταχύτητα ταλάντωσης του Σ τη χρονική στιγμή $t = 0,45\text{s}$.
 - ζ) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της δύναμης επαναφοράς που δέχεται το υλικό σημείο Σ σε συνάρτηση με το χρόνο για $t \geq 0$ αν θεωρήσουμε ότι η στοιχειώδης μάζα του υλικού σημείου Σ είναι $m = 5 \cdot 10^{-5} \text{ Kg}$.
 - η) Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης του σημείου Σ σε συνάρτηση με το χρόνο για $t \geq 0$.
2. Για ένα σημείο P που βρίσκεται πάνω στο ευθύγραμμο τμήμα $\Pi_1\Pi_2$ και απέχει x_1 και x_2 ($x_1 > x_2$) από τις πηγές Π_1 και Π_2 αντίστοιχα, η γραφική παράσταση της ταχύτητας ταλάντωσης του σε συνάρτηση με το χρόνο δίνεται στο παρακάτω σχήμα:



- α) Να διερευνήσετε αν στο σημείο P έχουμε ενισχυτική ή αποσβεστική συμβολή.
- β) Να βρεθούν οι αποστάσεις x_1 και x_2 . Σε ποια υπερβολή ενίσχυσης ή απόσβεσης βρίσκεται το σημείο P ;
- γ) Να γίνουν οι γραφικές παραστάσεις της απομάκρυνσης του σημείου P σε συνάρτηση με το χρόνο, για κάθε κύμα ξεχωριστά. Ποια αρχή επιβεβαιώνεται από τις γραφικές παραστάσεις;
3. Να βρείτε ποια σημεία μεταξύ των Π_1 και Π_2 ταλαντώνονται με ενέργεια ταλάντωσης ίση με την ενέργεια ταλάντωσης του σημείου Σ και ποια σημεία μεταξύ των Π_1 και Π_2 ταλαντώνονται με ενέργεια ταλάντωσης ίση με την ενέργεια ταλάντωσης του σημείου P αν θεωρήσουμε ότι όλα τα υλικά σημεία μεταξύ των πηγών έχουν την ίδια στοιχειώδη μάζα με το Σ .
4. Να σχεδιάσετε τις υπερβολές ενίσχυσης και απόσβεσης μεταξύ των πηγών Π_1 και Π_2 .
5. Να βρείτε τη διαφορά των αποστάσεων από τις δύο πηγές για ένα σημείο A που ανήκει στην 2^η υπερβολή αποσβεστικής συμβολής δεξιά της μεσοκαθέτου του $\Pi_1\Pi_2$.
6. Ένα σημείο K της επιφάνειας του υγρού που ανήκει στην 5^η υπερβολή ενισχυτικής συμβολής δεξιά της υπερβολής του Σ , μετά τη συμβολή των δύο κυμάτων σε αυτό ταλαντώνεται με εξίσωση $y=0,8\eta\mu(20\pi t-5\pi)$ (S.I.). Να βρείτε τις αποστάσεις d_1 και d_2 του σημείου K από τις πηγές Π_1 και Π_2 . Δίνεται: $\pi^2=10$.

2.2.23. Η επιφανειακή συμβολή, μια συνθήκη, το πλήθος και η $\Delta\phi$.

Δύο σύγχρονες πηγές O_1 και O_2 που απέχουν απόσταση $d=24\text{cm}$, αρχίζουν να εκτελούν απλή αρμονική ταλάντωση τη χρονική στιγμή $t=0$ με εξισώσεις $y_1=y_2=A\eta\mu\omega t$ ($y \rightarrow \text{cm}$, $t \rightarrow \text{s}$) αντίστοιχα και δημιουργούν εγκάρσια αρμονικά κύματα που διαδίδονται στην επιφάνεια νερού που ηρεμεί. Τη χρονική στιγμή $t_1=1,175\text{s}$ στα σημεία Σ και N που βρίσκονται στην επιφάνεια του νερού και αριστερά της μεσοκαθέτου του ευθύγραμμου τμήματος O_1O_2 , έχει φθάσει μόνο το κύμα που δημιουργεί η πηγή O_1 . Η φάση του σημείου Σ τη χρονική στιγμή t_1 είναι $\phi_\Sigma=3\pi \text{ rad}$. Την ίδια χρονική στιγμή η διαφορά φάσης μεταξύ του σημείου Σ και του

σημείου N είναι $\Delta\phi = \frac{9\pi}{2} \text{ rad}$. Εάν οι αποστάσεις που απέχει το σημείο Σ από τις πηγές O_1 και O_2 είναι

$O_1\Sigma = r_1=20,5\text{cm}$ και $O_2\Sigma=r_2=24,5\text{cm}$ αντίστοιχα και η απόσταση του σημείου N από την πηγή O_1 είναι

$O_1N = r'_1=16\text{cm}$, να υπολογιστούν:

- A₁**. Το μήκος κύματος λ των παραγομένων από τις πηγές O_1 και O_2 αρμονικών κυμάτων καθώς και η περίοδος τους T .
- A₂**. Η ταχύτητα διάδοσης των κυμάτων v στην επιφάνεια του νερού.
- B₁**. Εάν μετά την συμβολή των δύο κυμάτων στα σημεία Σ και N , το σημείο N βρίσκεται πάνω σε υπερβολή αριστερά της μεσοκαθέτου του τμήματος O_1O_2 και ταλαντώνεται με ενέργεια ταλάντωσης ίση με το μισό της ενέργειας ταλάντωσης του σημείου Σ , να βρεθεί μία παραμετρική συνθήκη που να συνδέει τις αποστάσεις r'_1 και r'_2 από τις πηγές O_1 και O_2 των σημείων της επιφάνειας του νερού που βρίσκονται μεταξύ των δύο πηγών και ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος με το σημείο N . Εάν το N βρίσκεται πάνω στην υπερβολή που αντιστοιχεί στην τιμή 9 της παραμέτρου, να βρεθεί η απόσταση O_2N που απέχει από την πηγή O_2 .
- B₂**. Μετά την συμβολή των δύο κυμάτων, να υπολογιστεί το πλήθος των υπερβολών που αποτελούνται από σημεία που ταλαντώνονται με το ίδιο πλάτος με το σημείο N και βρίσκονται μεταξύ των σημείων N και Σ .

- B₃**. Να υπολογιστεί το πλήθος των σημείων της επιφάνειας του νερού που βρίσκονται στην ευθεία O_2N και παραμένουν ακίνητα μετά την συμβολή των δύο κυμάτων.
- Γ**. Να γίνει η γραφική παράσταση της διαφοράς φάσης $\Delta\phi$ μεταξύ των σημείων N και Σ σε συνάρτηση με τον χρόνο ταλάντωσης t . Να θεωρήσετε ότι όλα τα σημεία της επιφάνειας του νερού έχουν την ίδια μάζα και ότι τα κύματα διαδίδονται στην επιφάνεια του νερού χωρίς απώλειες ενέργειας.

2.2.24. Το πλάτος και η διαφορά φάσης στο στάσιμο κύμα.

Στα άκρα A και B μιας ομογενούς χορδής AB μήκους $l=64\text{cm}$ που έχει την διεύθυνση του άξονα $x'Ox$ υπάρχουν δύο σύγχρονες πηγές παραγωγής αρμονικών κυμάτων, που ταλαντώνονται με εξίσωση $y_A = y_B = A\eta\omega t$ (S.I.). Τα δύο αρμονικά κύματα διαδιδόμενα με αντίθετες φορές συμβάλλουν τη χρονική στιγμή $t=0$ στο μέσο O της χορδής που θεωρείται και η αρχή του άξονα $x'Ox$ ($x=0$). Από τη συμβολή των δύο αρμονικών κυμάτων δημιουργείται στάσιμο κύμα και στο σημείο O δημιουργείται κοιλία. Ένα σημείο Z της χορδής ($X_Z = -24\text{cm}$) αρχίζει να ταλαντώνεται και μετά από χρόνο $\Delta t = 1,5\text{s}$ τετραπλασιάζεται η ενέργεια ταλάντωσης του. Η δυναμική ενέργεια ταλάντωσης του σημείου Z γίνεται μέγιστη 20 φορές σε χρόνο 5s . Όταν μεγιστοποιείται η δυναμική ενέργεια του σημείου Z , η θέση του και η θέση του πλησιέστερου σε αυτό σημείου που επίσης έχει μέγιστη δυναμική ενέργεια, ορίζουν ευθύγραμμο τμήμα μήκους $d=10\text{cm}$.

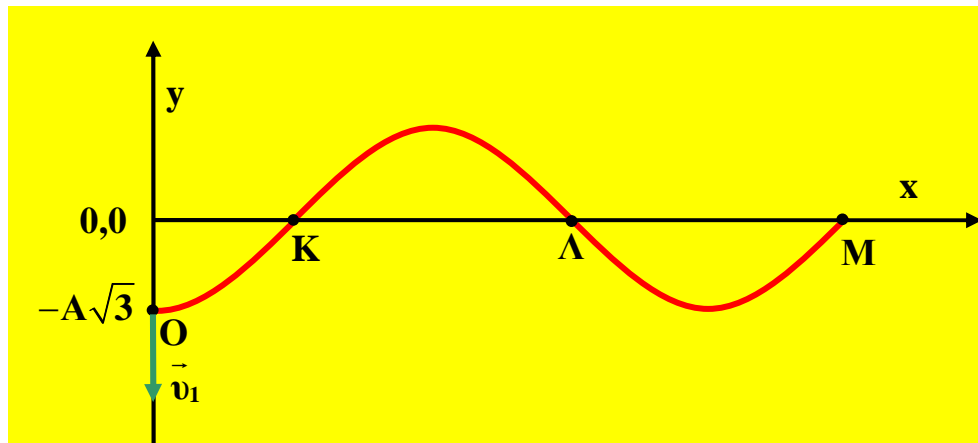
- A**. Να γραφεί η εξίσωση της απομάκρυνσης του σημείου Z σε συνάρτηση με το χρόνο $y_Z(t)$ και να γίνει η γραφική παράσταση της.
- B₁**. Να σχεδιάσετε το στιγμιότυπο της χορδής $y=f(x)$ τη χρονική στιγμή $t=0,375\text{s}$.
- B₂**. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση της φάσης των διαφόρων σημείων της χορδής AB σε συνάρτηση με την απομάκρυνσή τους x από τη θέση O , $\phi=\phi(x)$, τη χρονική στιγμή $t=0,375\text{s}$.
- B₃**. Να σχεδιάσετε τη γραφική παράσταση του πλάτους ταλάντωσης των διαφόρων σημείων της χορδής AB σε συνάρτηση με την απομάκρυνσή τους x από τη θέση O , $|A'| = |A| (x)$.
- Γ**. Να βρεθούν οι αποστάσεις που απέχουν από το σημείο O τα σημεία της χορδής, που μετά τη δημιουργία του στασίμου κύματος, ταλαντώνονται με ενέργεια ίση με το 25% της ενέργειας του σημείου Z και έχουν την ίδια φάση με αυτό. Να θεωρήσετε ότι όλα τα σημεία της χορδής AB έχουν την ίδια μάζα.

2.2.25. Με αφορμή ένα στιγμιότυπο στάσιμου κύματος

Σε μια χορδή μεγάλου μήκους, έχει διαμορφωθεί στάσιμο κύμα της μορφής:

$$y = 2A\sigma\eta\left(\frac{2\pi x}{\lambda}\right) \cdot \eta\mu(\omega t), \text{ όπου } A = 0,2 \text{ m και } \omega = 20\pi \text{ rad/s.}$$

Στο σχήμα, δίνεται ένα τμήμα του στιγμιότυπου του στάσιμου κύματος αυτού κάποια χρονική στιγμή t_1 , στην περιοχή από $x=0$ μέχρι το σημείο M στη θέση $x_M = 0,5 \text{ m}$. Στα σημεία K , Λ , M είναι δεσμοί, ενώ το υλικό σημείο O στη θέση $x=0$, κινείται κατά την αρνητική φορά.



Να υπολογίσετε:

- i) Το μήκος κύματος λ .
- ii) Την ταχύτητα στη θέση $x = 0$ την χρονική στιγμή t_1 .
- iii) Σε πόσο χρόνο, τα υλικά σημεία της χορδής που ταλαντώνονται, θα σταματήσουν να κινούνται για πρώτη φορά μετά την χρονική στιγμή t_1 .
- iv) Τα μέτρα των ταχυτήτων στα σημεία που βρίσκονται στις θέσεις $x = x_k = \left(\frac{12k+1}{3}\right) \cdot \frac{\lambda}{4}$, την χρονική στιγμή t_1 , όπου $k = 0, 1, 2, 3, \dots$

2.2.26. Το στάσιμο κύμα είναι ειδική περίπτωση συμβολής

Θεωρούμε μια οριζόντια ελαστική χορδή μεγάλου μήκους, Έστω $\Sigma_1\Sigma_2$ ένα τμήμα της χορδής μήκους $d=36\text{cm}$. Την στιγμή $t=0$ ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους $A=5\text{cm}$ συχνότητας $f=2\text{Hz}$ και ταχύτητας διάδοσης $v=48\text{cm/s}$ φτάνει στο σημείο Σ_1 με φορά διάδοσης από το Σ_1 προς το Σ_2 . Την ίδια χρονική στιγμή στο σημείο Σ_2 φτάνει ένα δεύτερο κύμα με το ίδιο πλάτος την ίδια συχνότητα και το ίδιο μήκος κύματος διαδιδόμενο από το Σ_2 προς το Σ_1 .

Υποθέτουμε ότι τα σημεία Σ_1 και Σ_2 την στιγμή $t=0$ έχουν ταχύτητες παράλληλες και ομόρροπες

A) Να εξηγήσετε γιατί μεταξύ των σημείων Σ_1 και Σ_2 θα δημιουργηθεί στάσιμο κύμα.

Έστω t_1 η χρονική στιγμή κατά την οποία έχει ολοκληρωθεί η δημιουργία στασίμου κύματος σε ολόκληρο το τμήμα $\Sigma_1\Sigma_2$

B) Να υπολογίσετε το πλάτος της ταλάντωσης των σημείων του τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ ως συνάρτηση της απόστασής τους από το σημείο Σ_1 , μετά την χρονική στιγμή t_1 .

Γ) Να υπολογίσετε το πλήθος και τις θέσεις των δεσμών που σχηματίζονται στο τμήμα $\Sigma_1\Sigma_2$.

Δ) Να υπολογίσετε το πλήθος και τις θέσεις των κοιλιών που σχηματίζονται στο τμήμα $\Sigma_1\Sigma_2$.

Ε) Να κάνετε την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης των σημείων του τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ ως συνάρτηση της απόστασής τους από το σημείο Σ_1 τις στιγμές $t_2=1\text{s}$ και $t_3=1,125\text{s}$

Να μελετηθεί το ίδιο πρόβλημα αν την στιγμή $t=0$ τα σημεία Σ_1 και Σ_2 έχουν ταχύτητες παράλληλες και αντίρροπες.

2.2.27. Διακρότημα τόσο στην κυματομορφή όσο και στο στιγμιότυπο

Θεωρούμε μια οριζόντια ελαστική χορδή μεγάλου μήκους, Έστω $\Sigma_1\Sigma_2$ ένα τμήμα της χορδής μήκους $d=2m$. Την στιγμή $t=0$ ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα πλάτους $A=0,5cm$ γωνιακής συχνότητας $\omega_1=21\pi$ rad/s και ταχύτητας διάδοσης $v=1$ m/s φτάνει στο σημείο Σ_1 με φορά διάδοσης από το Σ_1 προς το Σ_2 . Την ίδια χρονική στιγμή στο σημείο Σ_2 φτάνει ένα δεύτερο κύμα με το ίδιο πλάτος, την ίδια ταχύτητα διάδοσης και γωνιακή συχνότητα $\omega_2=19\pi$ rad/s διαδιδόμενο από το Σ_2 προς το Σ_1 .

Υποθέτουμε ότι τα σημεία Σ_1 και Σ_2 την στιγμή $t=0$ έχουν ταχύτητες παράλληλες και ομόρροπες.

- Να βρεθεί η εξίσωση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας του, συναρτήσει του χρόνου, ενός σημείου Σ του ευθυγράμμου τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ που απέχει απόσταση x από το σημείο Σ_1 , από την στιγμή $2s$ και μετά.
- Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας του μέσου M του ευθυγράμμου τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ από την στιγμή 0 έως την στιγμή $4s$ (κυματομορφή).
- Να σχεδιάσετε την γραφική παράσταση της απομάκρυνσης από την θέση ισορροπίας των σημείων του ευθυγράμμου τμήματος $\Sigma_1\Sigma_2$ συναρτήσει της απόστασής τους από το σημείο Σ_1 την χρονική στιγμή $t=4s$.

2.2.28. Εξισώσεις κυμάτων και συμβολή τους.

Κατά μήκος ενός γραμμικού ελαστικού μέσου και από αριστερά προς τα δεξιά (προς την θετική κατεύθυνση), διαδίδεται ένα εγκάρσιο αρμονικό κύμα, το οποίο φτάνει τη στιγμή $t_0=0$, στο σημείο O , στη θέση $x=0$. Το σημείο O αρχίζει την ταλάντωσή του από την θέση ισορροπίας του, κινούμενο προς την θετική κατεύθυνση και φτάνει στην ακραία θέση της ταλάντωσής του τη στιγμή $t_1=0,5s$, ενώ στο μεταξύ το κύμα έχει διαδοθεί κατά $0,25m$, δεξιότερα του O . Η απόσταση των δύο ακραίων θέσεων ταλάντωσης του O είναι $0,4m$.

- Να υπολογιστούν η περίοδος, το πλάτος και το μήκος του κύματος.
- Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος.
- Να σχεδιάστε ένα στιγμιότυπο του κύματος τη χρονική στιγμή $t_2=3s$, για τα σημεία του θετικού ημιιάξονα.

Κατά μήκος του ίδιου ελαστικού μέσου, διαδίδεται ταυτόχρονα ένα δεύτερο κύμα, από δεξιά προς τα αριστερά, με την ίδια συχνότητα και πλάτος, το οποίο τη στιγμή $t_0=0$ φτάνει σε ένα σημείο K , στη θέση $x_K=3,5m$, το οποίο επίσης αρχίζει να ταλαντώνεται προς την θετική κατεύθυνση.

- Να βρεθεί η εξίσωση του κύματος αυτού.
- Τα δύο κύματα συμβάλλουν και έτσι προκύπτει ένα στάσιμο κύμα. Να βρείτε τις θέσεις των δεσμών στην περιοχή $0 \leq x \leq 3,5m$
- Να σχεδιάστε ένα στιγμιότυπο του στάσιμου κύματος στην παραπάνω περιοχή τη χρονική στιγμή $t_3=9s$.